# COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

à l'IUFM de Guadeloupe en 2005

Antoine Delcroix

Ce cours d'analyse intéresse prioritairement les étudiants de Licence, des CPGE, et tous les candidats aux concours de recrutement de l'Education nationale (CAPES, Agrégation, CAPLP...). Ils regroupent principalement des éléments pour l'étude d'une fonction de la variable réelle à valeurs réelles (ou complexes). Ils ont été écrits pour répondre aux besoins des étudiants de l'IUFM de la Guadeloupe, d'abord pour la préparation de l'épreuve d'exposé (oral 1) puis avec une extension vers la préparation de l'écrit. Ce mode d'élaboration explique que ces cours ne couvrent pas l'ensemble d'un programme donné (DEUG, CAPES,...) et qu'ils ne répondent pas aux canons d'une publication officielle (par exemple : absence presque totale de bibliographie).

**Thème 0 : Suites numériques, fonctions d'une variable réelle** (non présent ici)

*Contenu*

1. Suites numériques (suite convergente : définition quantifiée de la limite) ; propriétés algébriques ; exemples de suites classiques : arithmétiques, géométriques, définies par récurrence ; comparaison des suites).

2. Fonction de la variable réelle (limites, continuité : définition quantifiée de la limite) ; dérivabilité ; théorème des accroissements finis et théorème de Rolle, applications ; dérivées successives ; formule de Leibniz, formules de Taylor ; étude locale des fonctions : comparaison des fonctions, développements limités).

*Commentaire :* Ce chapitre fait partie du bagage acquis en terminale scientifique et en L1 : il constitue un prérequis. Il ne fera donc l'objet de révisions spécifiques dans le cadre de la préparation à l'écrit qu'à votre demande. Des plans et résumés de cours seront disponibles en ligne. Notez que ce programme recoupe exactement les leçons d'oral 1, mentionnées ci-dessus et sera donc de fait revu lors des séances de préparation à l'oral 1.

**Thème 1 : Espaces vectoriels normés. Notion de suite et de série**

*Contenu*

1. Approfondissement du point 1 du thème 0.

2. Espaces métriques, espaces normés (en particulier normes équivalentes, théorème du point fixe).

*Commentaire* Ce chapitre fait partie du bagage acquis en L2/L3. Dans la pratique, les problèmes d'écrits ne sont pas centrés sur des études fines d'espaces métriques, normés ou de Hilbert. Mais, un problème sur les séries de Fourier et les noyaux intégraux classiques peut demander des connaissances standard sur, par exemple, le théorème de projection. Ceci donne toute son importance à ce thème.

**Thème 2 : Compléments sur les fonctions d'une variable réelle** (calcul intégral, intégrales dépendant d'un paramètre, intégrales généralisées) **et fonctions de plusieurs variables et intégrales multiples.**

**Thème 2A : Compléments sur les fonctions d'une variable réelle, calcul intégral, intégrales dépendant d'un paramètre, intégrales généralisées**

*Prérequis*

- L'intégralité du thème 1.

- L'intégrale de Riemann (sommes de Darboux ; définition de l'intégrale ; les grandes classes de fonctions intégrables ; les sommes de Riemann ; propriétés algébriques de l'intégrale ; les théorèmes de la moyenne ; notion de primitive et propriétés des primitives ; calcul des primitives ; intégrale de Riemann pour les fonctions à valeurs complexes).

*Contenu*

1. Approfondissement du point 2. du thème 1A (généralités sur les fonctions de la variable réelle).

2. Intégrales dépendant d'un paramètre.

3. Intégrales généralisées et applications.

*Commentaires* : A propos de l’usage des calculatrices, on rappelle que les primitives courantes se calculent à l'aide du noyau de calcul formel des calculatrices autorisées. En application de ce thème, l'étude des courbes paramétrées et polaires du plan (mais aussi de celles de l’espaces) peut être traité aussi bien en analyse qu’en géométrie, selon l’aspect sur lequel on met l’accent.

*Cours en ligne*

- Notion de limite pour une fonction de la variable réelle Application à l'étude des branches infinies.

- Continuité en un point. Fonctions continues. Nous placons ce document dans la lignée de celui consacré aux limites, en particulier pour le niveau de l'exposé. Les démonstrations des propriétés qui découlent quasi immédiatement de résultats sur les limites ne seront en général pas reprises. Dans le cas où ce document est utilisé comme support pour une préparation à la première épreuve orale du CAPES, ceci ne veut pas dire que le candidat au CAPES peut tout mettre en pré-requis puisqu'il s'expose à ce qu'on lui demande la démonstration des propriétés les plus significatives. C'est de toute façon un bon exercice que de lire ce document crayon en main et de refaire les démonstrations dans le cadre présent, souvent plus simple !

- Etude locale des fonctions et des suites.

- Calcul différentiel. I : Définitions & premières propriétés. II : Grands théorèmes & Applications. Dans le premier document, on présente la notion de nombre dérivée au travers des développements limités d'ordre 1. On sait qu'il y a équivalence pour une fonction entre posséder en un point un développement limité d'ordre 1 et un nombre dérivé. C'est faux pour les ordres supérieurs : une fonction peut posséder un développement limité d'ordre strictement supérieur à 1, tout en étant uniquement dérivable à l'ordre 1 (...). Le document se poursuit par une étude rapide des fonctions dérivables, de classe $C^p$ où p est un entier supérieur ou égal à 1. Les grands résultats sont reportés dans le document suivant. Cependant, deux résultats utilisés dans le cours du document (le théorème des accroissement finis et un théorème de Darboux) sont énoncés et démontrés en annexe. Le second document regroupe des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel comme le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis.

- Construction de l'intégrale de Riemann. Propriétés essentielles. Cette construction utilise les sommes de Darboux.

- Une introduction aux équations fonctionnelles classiques (épreuve d'oral 1). Les équations fonctionnelle figurent parmi les problèmes difficiles des mathématiques. On présente ci-dessous trois exemples classiques qui sont tous susceptibles de figurer dans un problème écrit ou dans un programme d'oral de concours. Il s'agit des équations f( xy ) = f(x) + f(y) ; f ( x+y ) = f(x) f(y) et f( xy ) = f(x) f(y).

- Cours sur les Intégrales généralisées (hors programme d'oral 1). Dans la théorie de l'intégrale de Riemann, la notion d'intégrale généralisée arrive relativement naturellement. En lisant ce document, le lecteur aura intérêt à penser aux analogies à établir avec l'étude des séries numériques (ou complexes). Des liens entre la convergence de séries et d'intégrales particulières sont par ailleurs étudiés.

- Intégrales dépendant d'un paramètre : Dans l'optique du concours, le seul cadre pour lequel il est indispensable de connaître des théorèmes d'existence et de régularité est celui d'une fonction définie sur un intervalle I à l'aide d'une intégrale dépendant d'un paramètre, avec un intervalle d'intégration compact. Le programme se limitant à l'intégrale de Riemann, il n'est pas nécessaire de maîtriser des théorèmes de convergence dominée (Ces théorèmes permettent des preuves plus simples à certains résultats de ce document). (...) Le cas d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale généralisée est traité. C'est ce cas qui donne lieu à des questions importantes dans les problèmes. On présente donc deux exemples de mise en oeuvre, dans les premières épreuves des CAPES de 1988 et de 1993.

**Thème 2B : Fonctions de plusieurs variables et intégrales multiples**

*Prérequis*

- Les thèmes 0 à 2A.

- Notions de base sur les fonctions de plusieurs variables (notions de différentielle et de dérivées partielles, matrice jacobienne, inégalité des accroissements finis, différentielles et dérivées partielles d'ordre supérieur, théorème de Schwarz, formule de Taylor, recherche d'extrema d'une fonction numérique de plusieurs variables).

*Contenu*

1. Compléments et révisions sur les fonctions de plusieurs variables.

2. Pratique du calcul des intégrales doubles et triples.

*Commentaires :* Le programme du concours n'est pas très difficile sur ce thème. On demande au candidat de connaître les propriétés de base des fonctions de plusieurs variables.

*Cours en ligne*

- Petit memento sur le calcul différentiel (hors programme d'oral 1).

**N.B.** Le lecteur pourra également visiter http://ens.univ-rennes1.fr/mathsciences1/ ou bien http://www.univ-ag.fr/~mhasler/m2/ pour des rappels de cours bien conçus sur le thème 2).

**Thème 3 : Suites et séries de fonctions, analyse de Fourier**

*Prérequis*

- L'intégralité du thème 0, du thème 1 et notamment :

- Les notions de base sur les suites et séries numériques et complexes,

- L'étude des fonctions de la variables réelles.

- Le thème 2.

- Les généralités sur les suites et séries de fonctions.

*Contenu*

1. Révisions et approfondissement sur les suites de fonctions (convergence simple, uniforme ; exemples,...)

2. Révisions et approfondissement sur les séries de fonctions (convergence simple, uniforme, normale ; exemples,...)

3. Application à l'étude d'intégrales généralisées dépendant d'un paramètre.

4. Révisions sur les séries entières.

5. Révisions sur les séries de Fourier.

*Commentaires :* Un cours synthétique portera sur les points 1., 2., 4. et 5. On mentionnera ici l'importance des théorèmes de régularité (qui donnent des conditions suffisantes pour qu'une limite de suites de fonctions, ou la somme d'une série possède la régularité des termes de la suite considérée).  C'est un sommet du programme du concours en analyse !

*Cours en ligne*

- Cours sur les suites et séries de fonctions.

**Thème 4 : Equations différentielles**

*Prérequis*

- L'intégralité des thèmes 0 à 2.

- Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants (théorie et pratique de la résolution, étude des équations avec seconds membres classiques).

- Les systèmes linéaires à coefficients constants d'ordre 1 (pratique de la résolution).

*Contenu*

1. Les systèmes linéaires et les équations différentielles linéaires : généralités, problème de Cauchy, théorème de Cauchy-Lipschitz, étude qualitative des solutions.

2. Etude des équations différentielles d'ordre 1 et 2.

3. Exemples usuels d'équations différentielles non-linéaires.

*Commentaires :* Le programme n'est peut être pas très poussé (par exemple, il ne demande pas de connaître une preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz). En revanche, un texte de concours peut demander une parfaite connaissance des conséquences des théorèmes fondamentaux sur la structure des ensembles de solutions des équations différentielles linéaires. Il faut également maîtriser les liens entre équations différentielles et leurs solutions, intégrales généralisées, suites ou séries de fonctions. C'est là ou se trouve des sources de nombreux (beaux) problèmes mathématiques pouvant inspirer un texte de concours. Un cours pourra faire le point sur les équations différentielles et des travaux dirigés présenteront des exemples des liens évoqués ci-dessus.

*Cours en ligne*

- Equations différentielles.

**PLC1-Mathématiques**
**Auteur : A. Delcroix**

# SUITES NUMERIQUES

## 1. Introduction-généralités sur les suites

### 1.1. Introduction : le cas d'une leçon de CAPES

Le premier problème pour les leçons d'oral 1 concernant les suites est de choisir son niveau d'exposé, puisque l'approche de la notion de convergence diffère essentiellement entre les classes du secondaire et le début du DEUG.

1. On peut choisir de ce placer au niveau des classes du secondaire. La présentation de la notion de limite en ‹‹ pour tout $\varepsilon$, il existe $n_0$ ›› est proscrite à ce stade. On constate cependant une évolution des programmes. La définition, basée sur la comparaison par rapport à une suite de référence[1], semble disparaître. Elle présentait en effet plusieurs obstacles d'ordre mathématique ou épistémologique. De fait, il ne s'agit que d'une condition suffisante qui laisse ouverte la question ‹‹ qu'est ce tendre vers 0 pour une suite de référence ›› Elle semble remplacée par une présentation très proche de la définition formelle, puisque elle la singe mais ‹‹ en langue de tous les jours ››. La manipulation de cette définition reste de toute façon limitée au lycée. Elle est aussi peu commode : essayez avec une définition en langue quotidienne d'écrire ce qu'est une suite ne tendant pas vers 0. En apparence plus simple, un exposé à ce niveau risque finalement de se transformer en piège s'il est mal maîtrisé.

2. Il parait donc plus raisonnable d'utiliser les ressources du programme complémentaire et utiliser la définition classique de DEUG : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l$ si

$$(\forall\varepsilon > 0) \quad (\exists n_0 > 0) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)\,.$$

Après quelques généralités sur les suites, on étudie la notion de suite convergente. Comme exemple de suites convergentes, on étudie les suites monotones, adjacentes, ainsi que l'application de ces dernières au développement décimal des nombres réels. On présente ensuite les suites tendant vers $+\infty$, cas particulier de suites divergentes non bornées. Ensuite on donne quelques exemples de suite récurrentes : les suites récurrentes linéaires. Le document se termine par des rappels sur le vocabulaire employé pour comparer la croissance de suites. Le lecteur appliquera cette dernière section aux exemples classiques

$$n \mapsto a^n \quad n \mapsto n^b \quad n \mapsto n!$$

### 1.2. Généralités sur les suites

#### 1.2.1. Suites et suites extraites

**Définition 1.1.** *On appelle suite de nombre complexes (*resp. *réels) toute application définie sur $\mathbb{N}$, ou sur une partie infinie de $\mathbb{N}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (*resp. *$\mathbb{R}$).*

**Notations**.
*i*. En notant $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et $\mathbb{I}$ une partie infinie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}^{\mathbb{I}}$ l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{I}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

*ii*. Pour $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{I}}$, on note $a_n$ l'image par $a$ de l'entier $n$ au lieu de $a(n)$ et la suite $a$ sera souvent notée $(a_n)_{n\in\mathbb{I}}$ ou $(a_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de définition $\mathbb{I}$ de $a$.

*iii*. On appelle $n^{ième}$ *terme* de la suite le couple $(n, a_n)$, $n$ étant le *rang* de ce terme et $a_n$ sa *valeur*. Par abus de langage, on dit souvent que $a_n$ est le $n^{ième}$ terme, ou le terme *général* de la suite.

**Définition 1.2.** *Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $s$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La suite $a \circ s$ est dite* extraite *de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

---

[1] On disait qu'une suite tend vers 0 si elle est majorée par une suite de référence tendant vers 0.

Une suite *extraite* sera souvent notée $(a_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ et il sera sous-entendu, dans ce cas, que l'application $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $s(n) = n_p$ est strictement croissante.

Par exemple, si $n_p = 2p$ (*resp.* $n_p = 2p+1$) , la suite extraite obtenue est la suite des termes pairs (*resp.* impairs) de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Elle est notée $(a_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ (*resp.* $(a_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$).

#### 1.2.2. 0pérations sur les suites

On particularise les définitions des opérations algébriques sur les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ (qui utilisent essentiellement la structure de corps de $\mathbb{K}$) au cas des suites en posant :

**Définition 1.3.** *Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{I}}$ et $(b_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{I}}$ deux suites.*
*i. On appelle* somme *(resp.* produit*) de ces deux suites la suite définie sur $\mathbb{I}$ de $n^{ième}$ terme $(n, a_n + b_n)$ (resp. $(n, a_nb_n)$). On la notera*

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{I}} \text{ ou } (a_n + b_n) \quad (\textit{resp. } (a_nb_n)_{n\in\mathbb{I}} \text{ ou } (a_nb_n)\,).$$

*ii. Si la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas sur un ensemble infini $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$, on définira le* quotient *des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme étant la suite définie sur $\mathbb{J}$ de $n^{ième}$ terme $(n, a_n/b_n)$. On la note*

$$(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{J}} \text{ ou } (a_n/b_n).$$

*iii. On définit enfin, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, le produit de $\lambda$ par la suite $(a_n)$ comme étant la suite de $n^{ième}$ terme $(n, \lambda a_n)$ notée $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{I}}$.*

On dispose du résultat suivant, simple cas particulier de théorèmes généraux sur les espaces de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

**Proposition 1.4.** *L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{I}}$ muni des opérations d'addition et de multiplication par un élément de $\mathbb{K}$ constitue un espace vectoriel. Muni de plus du produit des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{I}}$ possède une structure d'algèbre.*

#### 1.2.3. Suites bornées

Les suites bornées constituent des exemples importants de suites qui seront largement utilisées dans la suite de ce document (voir par exemple le théorème de bolzano-Weierstrass).

**Définitions 1.5.**
*i. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{I}}$ de nombres réels ou complexes est dite* bornée *si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{I}, \quad |a_n| \leq M$$

*ii. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{I}}$ de nombres **réels** est dite* majorée *(resp.* minorée*) s'il existe un nombre réel $m$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{I}, \;\; a_n \leq m \qquad (\textit{resp. } m \leq a_n\,)$$

Il est immédiat qu'une suite **réelle** $(a_n)_{n\in\mathbb{I}}$ est bornée si, et seulement si, elle est à la fois minorée et majorée.

La proposition suivante est de démonstration facile.

**Proposition 1.6.** *Si $(a_n)$ et $(b_n)$ sont deux suites complexes (resp. réelles) bornées leur somme, leur produit, le produit de l'une d'elle par un complexe (resp. réel) est encore bornée.*

Dans le même esprit, la somme de deux suites réelles majorées est encore une suite majorée. Le produit d'une suite réelle majorée par un réel positif (*resp.* négatif) est une suite majorée (*resp.* minorée). Le lecteur pourra énoncer des propriétés analogues pour les suites minorées et s'intéresser au cas du produit de 2 suites majorées (*resp.* minorées).

## 2. Notion de suite convergente

*Dans la suite de ce document on considérera sauf exceptions des suites définies sur $\mathbb{N}$ ou bien $\mathbb{N}^*$.*

### 2.1. Définition et premières conséquences

**Définitions 2.1.** *Soit* $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *On dit qu'un réel* $l \in \mathbb{K}$ *est* limite *de la suite* $(a_n)$*, pour* $n$ *tendant vers* $\infty$ *si l'on a*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_0 > 0) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)\,. \tag{2.1}$$

**Convention**.- la précision pour $n$ tendant vers $\infty$ sera omise dans la suite.

**Proposition-Définition 2.2.** *Soit* $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*,* $l \in \mathbb{K}$ *et* $l' \in \mathbb{K}$ *tels que* $l$ *et* $l'$ *soient limite de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Alors* $l = l'$*.*
*Lorsqu'il existe, l'unique réel* $l$ *rendant vrai la propriété (2.1) est appelé* la limite *de la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et on note*

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \textit{ou bien} \quad l = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

*On dit aussi que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* convergente*, ou qu'elle* converge *vers* $l$*.*

**Preuve**.- Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la notion de limite, il existe $n_0 > 0$ et $n_0' > 0$ tels que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon/2) \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0' \Rightarrow |a_n - l'| < \varepsilon/2)\,.$$

Pour $m = \max(n_0, n_0')$, il vient

$$|l - l'| \leq |a_m - l| + |a_m - l'| < \varepsilon.$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |l - l'| < \varepsilon.$$

Ce qui conduit à $l = l'$.□

**Exemple 2.3.** *Les suites constantes sont convergentes.*

**Proposition 2.4.** *Toute suite* $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *convergente est bornée.*

**Preuve**.- Soit $l$ la limite de la suite $(a_n)$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < 1)\,.$$

En posant $M_0 = \max_{0\leq i<n_0} |a_n|$ il vient clairement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq \max(M_0, |l| + 1).\square$$

**Proposition 2.5.** *Pour toute suite* $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *convergente, de limite* $l$*, la suite des modules* $(|a_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est convergente, de limite* $|l|$*.*

La **preuve** est directe, à partir de l'inégalité triangulaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||a_n| - |l|| \leq |a_n - l|\,.\square$$

La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de terme général $a_n = (-1)^n$ dont la suite des valeurs absolues est constante.
Cependant, pour une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ les deux assertions suivantes sont clairement équivalentes :
1. la suite $(a_n)$ tend vers 0 ;
2. la suite $(|a_n|)$ tend vers 0.

### 2.2. Propriétés des suites convergentes

#### 2.2.1. Théorème des gendarmes

**Ce théorème est spécifique des suites réelles.**

**Théorème 2.6.** *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites de* **nombres réels** *telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq u_n \leq b_n. \tag{2.2}$$

*Si les suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite vers* $l$*, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge aussi vers* $l$*.*

**Preuve**.- Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la notion de limite, il existe $n_0 > 0$ et $n_0' > 0$ tels que $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon) \quad ; \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \Big(n \geq n_0' \Rightarrow |b_n - l| < \varepsilon\Big)\,.$$

D'où, pour tout $n \geq \max(n_0, n_0')$, les inégalités

$$l - \varepsilon < a_n \leq u_n \leq b_n < l + \varepsilon,$$

puis $|u_n - l| < \varepsilon$.□

Ce théorème est parfois appelé théorème des gendarmes, l'inégalité 2.2 étant une hypothèse d'encadrement.

### 2.2.2. Propriétés algébriques

**Théorème 2.7.** *Soit* $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *et* $(b_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes de limites respectives* $l$ *et* $l'$. *Alors :*
*i. la suite* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l + l'$ *;*
*ii. Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *la suite* $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\lambda l$ *;*
*iii. la suite* $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $ll'$.

Nous commencons par énoncer deux lemmes, le premier est une remarque triviale.

**Lemme 2.8.** *Soit* $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *et* $l \in \mathbb{K}$. *La suite* $(u_n)$ *converge vers* $l$ *si, et seulement si, la suite* $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $0$.

**Lemme 2.9.** *Soit* $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *convergeant vers* $0$ *et soit* $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *une suite bornée. La suite* $(u_n v_n)$ *converge vers* $0$.

*Preuve du lemme 2.9.*- Soit $M$ un réel non nul tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |v_n| < M.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 > 0$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon/M)\,.$$

On a alors, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n v_n| < \varepsilon$.□

On est maintenant en mesure de prouver le théorème 2.7.
*i.* Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ et $l' = \lim_{n\to\infty} a_n$, il existe $n_0 > 0$ et $n_0' > 0$ tels que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon/2) \;\;;\;\; (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; (n \geq n_0 \Rightarrow |b_n - l'| < \varepsilon/2)\,.$$

En posant $N_0 = \max(n_0, n_0')$, il vient, pour $n \geq N_0$,

$$|a_n + b_n - (l + l')| \leq |a_n - l| + |b_n - l'| < \varepsilon.$$

*ii.* On utilise le lemme 2.9 avec pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $n \mapsto a_n - l$ et pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante $n \mapsto \lambda$. La suite $n \mapsto \lambda(a_n - l)$ converge vers 0. Comme la suite constante $n \mapsto \lambda l$ converge vers $\lambda l$, la suite $n \mapsto \lambda a_n$ converge vers $\lambda l$.

*iii.* On va montrer que la suite $n \mapsto a_n b_n - ll'$ converge vers 0. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n b_n - ll' = (a_n - l)b_n + l(b_n - l').$$

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car convergente. Comme la suite $n \mapsto a_n - l$ converge vers 0, le lemme 2.9 s'applique : la suite $n \mapsto (a_n - l)b_n$ converge vers 0.
D'après le *ii.* de ce théorème, la suite $n \mapsto l(b_n - l')$ converge vers 0. Le *i.* du théorème entraine alors que la suite $n \mapsto a_n b_n - ll'$ converge vers 0.□

## 2.3. Composition par une fonction continue

*Bien que la notion de fonction continue soit traitée ultérieurement dans ce cours, le lecteur constatera qu'il n'y a pas de cercle vicieux.*

Etant donnée une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, dont on note $a(\mathbb{N})$ l'image et $\varphi : a(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$, on peut définir la suite $\varphi \circ a := (\varphi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. D'une manière plus générale, la suite $\varphi \circ a$ est définie à partir d'un certain rang, lorsqu'il existe $n_0$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $a_n \in \operatorname{def}(\varphi)$. On a le résultat suivant :

**Théorème 2.10.** *Soit* $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *convergeant vers un réel* $a$, $I$ *un intervalle voisinage de* $a$ *et* $\varphi : I \to \mathbb{C}$ *une application continue en* $a$. *Alors la suite* $\varphi \circ a$, *définie à partir d'un certain rang, converge vers* $f(a)$.

**Preuve**
*Définition de la suite* $\varphi \circ a$.
Comme $I$ et voisinage de $a$ il existe $\delta > 0$ tel que $]a - \delta, a + \delta[ \subset I$. La convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $a$ entraine l'existence de $m_0$ tel que

$$\forall n \geq m_0, \quad u_n \in \,]a - \delta, a + \delta[\,.$$

Ainsi la suite $\varphi \circ a$ est définie pour $n \geq m_0$.
*Convergence de la suite $\varphi \circ a$.*
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\forall x \in I) \quad (|x-a| < \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon)\,.$$

Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$, relativement à $\min(\delta, \eta)$ il existe $n_0$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \min(\delta, \eta))\,.$$

On a alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$|\varphi(a_n) - \varphi(a)| < \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence vers $\varphi(a)$ de la suite $(\varphi(a_n))_{n\geq m_0}$.□

Donnons une application, complétant les propriétés algébriques vues ci-dessus :

**Proposition 2.11.** *Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers un réel $a$* ***non nul****. Alors la suite $(1/a_n)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $1/a$.*

**Preuve**
*Définition de la suite $(1/a_n)$.*
Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \neq 0$, il existe $m_0$ tel que

$$\forall n \geq m_0, \quad a - |a| < u_n < a + |a|\,.$$

Comme $0 \notin \left]a - |a|\,, a + |a|\right[$, la suite $(1/a_n)$ est définie pour $n \geq m_0$.
*Convergence de la suite $\varphi \circ a$.*
La fonction $\varphi : \left]a - |a|\,, a + |a|\right[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x$ est continue en tout point et en particulier en $1/a$. Ainsi, la suite $\varphi \circ a = (1/a_n)$ converge vers $1/a$, d'après le théorème 2.10.□

**Corollaire 1.** *Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $a$ non nul, $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $b$. La suite $(b_n/a_n)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $b/a$.*

**Preuve**.- On applique la proposition 2.11 à la suite $(a_n)$ et le théorème 2.7 aux suites $(b_n)$ et $(1/a_n)$.□

### 2.4. Suites extraites et convergence

**Proposition 2.12.** *Toute suite extraite d'une suite convergente, de limite $l$, est encore convergente de limite $l$.*

**Preuve**.- Considérons $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de limite $l$ et $s$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)\,.$$

Comme $s$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, on a en particulier $s\,(n) \geq n$ (preuve immédiate par récurrence). D'où, pour tout $n \geq n_0$, $s\,(n) \geq n_0$ et $\left|a_{s(n)} - l\right| < \varepsilon$.□

Le lecteur établira, à titre d'exercice, l'énoncé suivant :

**Proposition 2.13.** *Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $l$ un nombre réel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*1. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $l$ ;*
*2. les suites des termes pairs $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et impairs $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de limite $l$.*

**Remarque**.- L'énoncé précédent est faux si l'on suppose simplement les suites extraites des termes pairs et impairs convergentes, sans préciser qu'elles ont même limite.

**Exemple 2.14.** *La suite de terme général $a_n = (-1)^n$ ne converge pas alors que la suite des termes impairs et celle des termes pairs sont convergentes.*

On peut cependant montrer par exemple que la convergence des suites extraites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ entraine la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est un exercice classique.

## 3. Suites monotones et suites adjacentes

*Sans compter leur importance sur le plan mathématiques, les suites étudiées dans ce paragraphe constituent de bon thèmes d'oral pour les deux épreuves. Il s'agit exclusivement de suites à valeurs réelles.*

### 3.1. Suites monotones

#### 3.1.1. Définitions et généralités

**Définition 3.1.** *Soit* $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite.*
*1. On dit que* $(a_n)$ est croissante *(resp.* décroissante*) si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_{n+1} \quad (\text{resp. } a_{n+1} \leq a_n).$$

*2. On dit que* $(a_n)$ *est* monotone *si elle est soit croissante, soit décroissante.*

On vérifie que la somme de deux suites croissantes (*resp.* décroissantes) est encore croissante (*resp.* décroissante), que le produit d'une suite croissante (*resp.* décroissante) par :
1. un réel positif est encore croissante (*resp.* décroissante) ;
2. un réel négatif est décroissante (*resp.* croissante).

Avec le produit, il faut faire attention au *signe* des termes des suites. Par exemple, le produit de deux suites *à termes positifs* croissantes (*resp.* décroissantes) est encore une suite croissante (*resp.* décroissante). Mais le produit d'une suite croissante *à termes positifs* par une suite décroissante *à termes négatifs* est une suite décroissante à termes négatifs.

**Remarque.**- En complément aux mentions sur les signes faites ci-dessus, on peut cependant vérifier que toute suite monotone est de signe constant à partir d'un certain rang.
En effet, soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ supposée par exemple croissante. Supposons que $(a_n)$ ne soit pas de signe constant. Alors, l'ensemble $\{n \mid a_n \geq 0\}$ est non vide et minoré. Soit $n_0$ son plus petit élément. Comme $(a_n)$ est croissante, on a : $\forall n \geq n_0, \;\; a_n \geq 0.$□

#### 3.1.2. Monotonie et convergence

**Théorème 3.2.** *Toute suite* $(a_n)$ *de nombre réels croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente. Plus précisement, sa limite est le nombre*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad (\textit{resp.} \;\; \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n\,)$$

**Preuve**
1. Supposons $(a_n)$ croissante et majorée. L'ensemble $E = \{a_n, \; n \in \mathbb{N}\}$ est non vide est majoré, par hypothèse : il admet une borne supérieure $l$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n_0$ tel que

$$l - \varepsilon < a_{n_0} \leq l.$$

Comme la suite $(a_n)$ est croissante et que $l$ est un majorant de $E$, on a

$$\forall n \geq n_0 \quad l - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq l.$$

D'où la conclusion.
2. Le cas où $(a_n)$ est décroissante et minorée se traite en appliquant le point 1. à la suite $(-a_n)$.□

En particulier, on déduit du théorème 3.2 qu'une suite *monotone et bornée* est convergente.

Le lecteur pourra établir la proposition suivante, à titre d'exercice.

**Proposition 3.3.** *De toute suite numérique convergente, on peut extraite une suite monotone.*

Cette suite extraite est convergente, de même limite que la suite initiale, d'après les résultats précédents.

### 3.2. Suites adjacentes

#### 3.2.1. Définition et propriété principale

**Définition 3.4.** *On dit que deux suites de nombres réels* $(a_n)$ *et* $(b_n)$ *sont* adjacentes *si elles vérifient les propriétés suivantes :*
*1. la suite* $(a_n)$ *est croissante et la suite* $(b_n)$ *décroissante ;*
*2. la suite* $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

**Remarque.-** Les conditions 1. et 2. entrainent la propriété suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \leq b_n.$$

En effet, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle tend vers 0 par hypothèse, elle est nécessairement positive.□

**Théorème 3.5.** *Deux suites adjacentes* $(a_n)$ *et* $(b_n)$ *sont convergentes et convergent vers la même limite. De plus, si* $l$ *désigne cette limite commune, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq l \leq b_n.$$

**Preuve**.
1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, croissante et majorée (par $b_0$), possède une limite $l$. De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante et minorée, possède une limite $l'$.
2. La suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $l$, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$, comme somme des deux précédentes : on a donc $l = l'$. D'après le théorème 3.2, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} a_m = l \ ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad l = \inf_{m\in\mathbb{N}} b_m \leq b_n.$$

D'où la dernière assertion.□

#### 3.2.2. Exemple d'utilisation des suites adjacentes : développement décimal d'un nombre réel

Soit $x$ un nombre réel. On rappelle que la partie entière de $x$ est l'unique entier relatif $n$ noté $[x]$ tel que

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

**Théorème 3.6.** *Soit* $x$ *un nombre réel. Les suites de terme général* $u_n = 10^{-n}\,[10^n x]$ *et* $v_n = 10^{-n}\,[10^n x + 1]$ *sont adjacentes et de limite commune* $x$.

La **preuve** s'effectue en trois points.
1. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.* En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$[10^n x] \leq 10^n x < [10^n x] + 1. \tag{3.1}$$

D'où $10\,[10^n x] \leq 10^{n+1} x \leq 10\,([10^n x] + 1)$ puis

$$10\,[10^n x] \leq \left[10^{n+1} x\right],$$

le membre de gauche de l'égalité précédente étant entier. D'où, en multipliant par $10^{-n-1}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
2. *La suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.* En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les inégalités

$$10^{n+1} x \leq \left[10^{n+1} x + 1\right] \leq 10^{n+1} x + 1. \tag{3.2}$$

Or $10^n x < [10^n x] + 1 = [10^n x + 1]$. D'où les inégalités

$$\left[10^{n+1} x + 1\right] < 10\,[10^n x + 1] + 1,$$
$$\left[10^{n+1} x + 1\right] \leq 10\,[10^n x + 1].$$

En multipliant par $10^{-n-1}$, on obtient le résultat $v_{n+1} \leq v_n$.
3. On dispose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des inégalités

$$u_n \leq x \leq v_n \qquad v_n - u_n = 10^{-n}.$$

La première double inégalité vient des formules 3.1 et 3.2 et la deuxième de l'égalité

$$[10^n x + 1] = [10^n x] + 1.\square$$

La démonstration justifie le nom de *suite décimale* à $10^{-n}$ près *par défaut* (*resp. par excès*) donné à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*resp.* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$). On va maintenant voir un autre aspect de ce résultat.

**Proposition 3.7.** *Pour tout réel $x$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*
*1.* $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \in \mathbb{N}\ \ ;\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq a_n \leq 9$ *;*
*2. la suite de terme général* $\sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}$ *converge vers* $x$*.*

**Preuve.**- On utilise les notations du théorème 3.6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $x = u_n + r_n$. Il vient

$$0 \leq r_n < 10^{-n}, \tag{3.3}$$

d'après les inégalités (3.1). On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 10^{-n-1}\left[10^{n+1}u_n + 10^{n+1}r_n\right] = 10^{-n-1}\left(\left[10.10^n u_n + 10^{n+1}r_n\right]\right), \\ &= 10^{-n-1}\left(10u_n + \left[10^{n+1}r_n\right]\right), \end{aligned}$$

car $10^n u_n = [10^n x]$ est entier. D'où

$$u_{n+1} = 10^{-n}u_n + 10^{-n-1}\left[10^{n+1}r_n\right].$$

On pose $a_0 = [x] = u_0$ et pour $n \geq 0$, $a_{n+1} = \left[10^{n+1}r_n\right]$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq 9$, d'après 3.3. Une récurrence simple montre que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad u_N = a_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{N} 10^{-k} a_k.$$

Comme, d'après le théorème 3.6 $\lim_{N\to+\infty} u_N = x$, la suite $(a_n)$ convient.□

Si $x$ est un réel positif, une suite $(a_n)$ vérifiant les propriétés 1. et 2. de la proposition 3.7 est un *développement décimal* du réel $x$.

Par exemple, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_0 = 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 9\ ;\ \ \ a'_0 = 1,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a'_n = 0$$

sont deux développements décimaux (le démontrer !) du même réel $x = 1$. On pose alors la définition suivante.

**Définition 3.8.** *On appelle* développement décimal propre *d'un réel $x$ positif une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*
*1.* $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \in \mathbb{N}\ \ ;\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq a_n \leq 9$ *;*
*2. la suite de terme général* $u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}$ *converge vers* $x$ *;*
*3. la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas constante, égale à 9, à partir d'un certain rang.*

**Proposition 3.9.** *Tout réel positif possède un et un seul développement décimal propre.*

**Preuve**
*Existence.*- Soit $x$ un réel positif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le développement décimal de $x$ construit dans la preuve de la proposition 3.7. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas constante, égale à 9, à partir d'un certain rang $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle convient. Sinon, il existe $n_0 > 0$ tel que

$$a_{n_0} < 9 \qquad\qquad \forall n \geq n_0 + 1,\ a_n = 9.$$

Remarquons que le théorème 3.6 entraine que

$$x = \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k} = \sum_{k=0}^{n_0} a_k 10^{-k} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k 10^{-k}.$$

Or, pour $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k 10^{-k} &= 9.10^{-n} \textstyle\sum_{k=n_0+1}^{n} 10^{n-k} = 9.10^{-n} \sum_{l=0}^{n-n_0-1} 10^l \\ &= 9.10^{-n}\frac{1}{9}\left(10^{n-n_0} - 1\right) = 10^{-n_0} - 10^{-n}. \end{aligned}$$

(On utilise ici l'expression de la somme des $n - n_0$ premiers termes d'une progression géométrique de raison 10, donnée de manière générale dans la proposition 5.6 ci dessous. Le lecteur vérifiera que les deux preuves sont indépendantes ou bien redémontrera la proposition dans ce cas particulier.) D'où

$$x = \textstyle\sum_{k=0}^{n_0} a_k 10^{-k} + 10^{-n_0}.$$

On définit la suite $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \{0, \ldots, n_0 - 1\},\ a'_n = a_n\ ;\ a'_{n_0} = a_{n_0} + 1\ ;\ \forall n \geq n_0,\ a'_n = 0.$$

Clairement, $x = \sum_{k=0}^{n_0} a'_k 10^{-k}$ et la suite $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient.

*Unicité.*- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux développements décimaux propres du même réel $x$. Nous poserons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}$ et $u'_n = \sum_{k=0}^{n} a'_k 10^{-k}$.
Supposons, en raisonnant par l'absurde, que ces deux développements ne sont pas identiques. Il existe alors un entier $m$ tel que

$$\forall k \in \{0, \ldots, m-1\},\ \ a'_k = a_k\ \ ;\ \ a'_m \neq a_m.$$

On va alors estimer la différence $u_n - u'_n$ pour $n$ ‹‹assez grand››. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *propres*, on vérifie qu'il existe $N > m$ tel que l'on ait $|a_N - a'_N| < 9$. On a, pour tout $n \geq N$,

$$u_n - u'_n = 10^{-m}(a_m - a'_m) + \sum_{k=m+1}^{n}(a_k - a'_k)10^{-k}.$$

Posons $B = 10^{-m}(a_m - a'_m)$ et $C_n = \sum_{k=m+1}^{n}(a_k - a'_k)10^{-k}$. On a

$$|C_n| =| \sum_{k=m+1}^{n}(a_k - a'_k)10^{-k} \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k - a'_k|\, 10^{-k} \leq 9\sum_{k=m+1}^{n} 10^{-k} - 10^{-N}$$

(en majorant les $|a_k - a'_k|$ par 9, sauf $|a_N - a'_N|$ que l'on majore par 8). Or

$$9\sum_{k=m+1}^{n} 10^{-k} = 9.10^{-n}\sum_{k=m+1}^{n} 10^{n-k} = 10^{-m} - 10^{-n} < 10^{-m}.$$

(On utilise de nouveau l'expression des sommes de termes d'une suite géométrique.) On en déduit, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - u'_n| \geq |B| - |C_n| \geq 10^{-m}\,|a_m - a'_m| - 10^{-m} + 10^{-N} \geq 10^{-N}.$$

La suite $(|u_n - u'_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas vers 0. Ceci est absurde puisque $(u)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers $x$.□

### 3.2.3. Exemple d'application des suites adjacentes : le théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce théorème est un résultat essentiel en analyse : il est notamment utilisé, pour établir certaines propriétés des fonctions continues.

**Théorème 3.10.** *De toute suite de nombres réels bornée on peut extraire une suite convergente.*

**Preuve.-** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornée. La démonstration se fait en deux étapes.
1. *Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intervalle $[a_n, b_n]$ contiennent une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* : on construit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur le rang $n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a \leq u_n \leq b$.
On pose alors $a_0 = a$ et $b_0 = b$. et l'intervalle $[a_0, b_0]$ contient *tous* les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $m$ un entier. Supposons construit les termes $(a_k)_{0\leq k\leq m}$ et $(b_k)_{0\leq k\leq m}$ vérifiant d'une part

$$\forall k \in \{0, \ldots, m\},\ \ b_k - a_k = (b-a)/2^k\ ;\ \ \forall k \in \{1, \ldots, m\},\ \ a_{k-1} \leq a_k\ \text{ et }\ b_{k-1} \geq b_k, \tag{3.4}$$

et d'autre part que chaque intervalle $[a_k, b_k]$ contienne une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Posons $c_m = (a_m + b_m)/2$. L'un au moins des intervalles $[a_m, c_m]$ ou $[c_m, b_m]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si c'est le cas de $[a_m, c_m]$ on pose $a_{m+1} = a_m$, $b_{m+1} = c_m$. On alors

$$b_{m+1} - a_{m+1} = (b_m - a_m)/2 = (b-a)/2^{m+1} \quad a_m \leq a_{m+1} \text{ et } b_{m+1} \geq b_m. \tag{3.5}$$

Sinon, $[c_m, b_m]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on pose $a_{m+1} = c_m$, $b_{m+1} = b_m$.
Les propriétés (3.5) sont également vérifiées.
Ainsi peut-on construire par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les propriétés (3.4), vérifiées pour tout $m \in \mathbb{N}$, montrent immédiatement qu'elles sont adjacentes.

*2. Il existe une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergant vers la limite commune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
On procède également par récurrence. Posons $n_0 = 0$ et soit $m$ un entier. On suppose construits $m$ entiers $(n_k)_{0\leq k\leq m}$ tels que

$$\forall k \in \{1, \ldots, m\},\ \ n_{k-1} < n_k\ \ ;\ \ \forall k \in \{0, \ldots, m\},\ \ a_k \leq u_{n_k} \leq b_k. \tag{3.6}$$

L'intervalle $[a_{m+1}, b_{m+1}]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc au moins un terme de rang strictement supérieur à $n_m$. On pose

$$n_{m+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [a_{m+1}, b_{m+1}] \text{ et } n > n_m\}.$$

Par construction $u_{n_{m+1}} \in [a_{m+1}, b_{m+1}]$ et $n_{m+1} > n_m$. Ainsi construit-on par récurrence une suite $(u_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la deuxième inégalité de (3.6) elle converge, vers la même limite que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par application du théorème des Gendarmes.□

Le lecteur pourra déduire du théorème de Bolzano-Weierstrass et de la proposition 3.3 le résultat suivant.

**Proposition 3.11.** *De toute suite numérique bornée, on peut extraite une suite monotone.*

## 4. Suites tendant vers l'infini

**Cette section concerne les suites à valeurs réelles.**

### 4.1. Position du problème : suite divergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si

$$(\exists l \in \mathbb{R}) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_0 > 0) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

A l'inverse $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, si et seulement si

$$(\forall l \in \mathbb{R}) \quad (\exists \varepsilon > 0) \quad (\forall n_0 > 0) \quad (\exists n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \text{ et } \quad |u_n - l| \geq \varepsilon).$$

On dira qu'une suite non convergente est *divergente*.

Cette situation arrive dans plusieurs cas, par exemple

**Proposition 4.1.** *Toute suite non bornée est divergente.*

**Preuve**.- C'est la contraposée de la proposition 2.2

**Remarque**.- Il ne faut pas croire que seules les suites non bornées sont divergentes. Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ est divergente.

Dans la suite nous étudierons un cas particulier de suite non bornée les suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$.

### 4.2. Suite tendant vers l'infini

**Définition 4.2.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* tend vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) *si*

$$\begin{array}{c} (\forall \alpha > 0) \quad (\exists n_0 > 0) \quad (\forall n \in) \, \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow u_n > \alpha) \\ (\textit{resp.} \quad (\forall \alpha > 0) \quad (\exists n_0 > 0) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \Rightarrow u_n < -\alpha) \;). \end{array} \tag{4.1}$$

**Remarque**.- Il est clair que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si, et seulement si $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$), on dit aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) comme limite et l'on note

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \quad (\textit{resp.} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty\,).$$

### 4.3. Propriétés

#### 4.3.1. Théorème de comparaison

**Théorème 4.3.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

*Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ ), alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ ).*

**Preuve**.
1. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. Pour tout $\alpha > 0$ il existe $\exists n_0 > 0$ tel que

$$(\exists n_0 > 0) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \Rightarrow u_n > \alpha).$$

On a, *a fortiori*, pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow v_n > \alpha$.
2. Le cas de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $-\infty$ se règle à l'aide du précédent appliqué à $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.□

### 4.3.2. Propriétés algébriques

Considérons deux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent chacune une limite finie ou bien infinie. On dispose des tableaux de cas suivants pour les limites des suites $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où les points d'interrogation symbolisent les cas indéterminés.

#### Avec la somme

**Proposition 4.4.** *Avec les conventions précédentes, on dispose du tableau de cas suivant pour la limite des suites* $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

| $\lim(u_n+v_n)$ | $\lim u_n = l$ | $\lim u_n = -\infty$ | $\lim u_n = +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lim v_n = l'$ | $l+l'$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim v_n = -\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ? |
| $\lim v_n = +\infty$ | $+\infty$ | ? | $+\infty$ |

.

**Avec le produit** On notera $\operatorname{sgn}(x)$ le signe d'un réel $x$.

**Proposition 4.5.** *Avec les conventions précédentes, on dispose du tableau de cas suivants pour la limite de* $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

| $\lim(u_nv_n)$ | $\lim u_n = 0$ | $\lim u_n = l \neq 0$ | $\lim u_n = -\infty$ | $\lim u_n = +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n = 0$ | 0 | 0 | ? | ? |
| $\lim v_n = l' \neq 0$ | 0 | $ll'$ | $-\operatorname{sgn}(l')\infty$ | $\operatorname{sgn}(l')\infty$ |
| $\lim v_n = -\infty$ | ? | $-\operatorname{sgn}(l)\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim v_n = +\infty$ | ? | $\operatorname{sgn}(l)\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

.

**Proposition 4.6.** *Avec les conventions précédentes, on dispose du tableau de cas suivants pour la limite de* $(u_n/v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

| $\lim(u_n/v_n)$ | $\lim u_n = 0$ | $\lim u_n = l \neq 0$ | $\lim u_n = -\infty$ | $\lim u_n = +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n = 0$ <br> $v_n$ *ne s'annule pas et garde un signe constant* | ? | $\operatorname{sgn}(l)\operatorname{sgn}(v_n)\infty$ | -$\operatorname{sgn}(v_n)\infty$ | $\operatorname{sgn}(v_n)\infty$ |
| $\lim v_n = l' \neq 0$ | 0 | $l/l'$ | $-\operatorname{sgn}(l')\infty$ | $\operatorname{sgn}(l')\infty$ |
| $\lim v_n = -\infty$ | 0 | 0 | ? | ? |
| $\lim v_n = +\infty$ | 0 | 0 | ? | ? |


| $\lim(u_nv_n)$ | $\lim u_n = 0$ | $\lim u_n = l \neq 0$ | $\lim u_n = -\infty$ | $\lim u_n = +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n = 0$ | 0 | 0 | ? | ? |
| $\lim v_n = l' \neq 0$ | 0 | $ll'$ | $-\operatorname{sgn}(l')\infty$ | $\operatorname{sgn}(l')\infty$ |
| $\lim v_n = -\infty$ | ? | $-\operatorname{sgn}(l)\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim v_n = +\infty$ | ? | $\operatorname{sgn}(l)\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

.


#### Démonstrations

1. Nous allons prouver deux des résultats concernant les propositions 4.4 et 4.5.

*i. Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = l \neq 0$ *et* $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$ *alors* $\lim_{n\to\infty} u_nv_n = +\infty$.
Nous supposerons $l > 0$. Relativement à $\varepsilon = l/2$ il existe $n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $\mid u_n - l \mid < l/2$. On en déduit

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n > l/2. \tag{4.2}$$

Soit maintenant $\alpha > 0$. Comme $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$, il existe $n_0'$ tel que

$$\forall n \geq n_0', \quad v_n > 2\alpha/l. \tag{4.3}$$

Posons $N_0 = \max(n_0, n_0')$. Compte tenue des inégalités entre nombres positifs (4.2) et (4.3), il vient

$$\forall n \geq N_0, \quad u_nv_n > \alpha.$$

D'où le résultat. $\square$

*ii. Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ *et* $\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = -\infty$.

Soit $\alpha > 0$. Relativement à $\alpha' = \sqrt{\alpha}$ il existe $n_0$ et $n_0'$ tels que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(n \geq n_0 \Rightarrow u_n > \sqrt{\alpha}\right) \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(n \geq n_0' \Rightarrow v_n < -\sqrt{\alpha}\right).$$

Posons $N_0 = \max(n_0, n_0')$. Pour $n \geq N_0$, il vient $u_n v_n < -\sqrt{\alpha} u_n$ et $\sqrt{\alpha} u_n > \alpha$ D'où, enfin $u_n v_n < -\alpha$.□

2. Pour la proposition 4.6, on remarque que si la suite $(v_n)$ tend vers $l' \neq 0$ *(resp.* $\pm\infty$), la suite $(1/v_n)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers $l' \neq 0$ *(resp.* 0).
De même, si la suite $(v_n)$ **ne s'annule pas** (éventuellement à partir d'un certain rang) et si $(v_n)$ tend vers 0 **en gardant un signe constant** alors la suite $(1/v_n)$ est définie est définie et tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ selon le signe de la suite $(v_n)$.
On applique alors la proposition 4.5. aux suites $(u_n)$ et $(1/v_n)$.□

## 5. Quelques exemples classiques de suite

### 5.1. Introduction : suites récurrentes du premier ordre

**Définition 5.1.** *Une suite* $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *est dite* récurrente *du premier ordre si, et seulement si existe un réel* $\alpha$ *et une application* $f$ *définie sur une partie* $E$ *de* $\mathbb{K}$ *et à valeurs dans cette même partie telle que*

$$u_0 = \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \tag{5.1}$$

Si l'application $f$ est définie sur $\mathbb{K}$ par $f(x) = ax + b$, où $a$ et $b$ sont deux nombres complexes, la suite est dite récurrente *linéaire*. Les suites arithmétiques et les suites géométriques, définies ci-dessous, en sont deux cas particuliers : leur importance pratique justifie une étude à part.

Pour chacun de ces types de suites nous préciserons le terme général, la somme des $(n+1)$ premier termes (utile dans les exemples d'interventions de ces suites) et ferons l'étude de la convergence.

### 5.2. Suites arithmétiques

**Définition 5.2.** *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée* suite arithmétique *si, et seulement si existe deux nombres complexes* $a$ *et* $\alpha$ *tels que*

$$u_0 = \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a. \tag{5.2}$$

*Le nombre* $a$ *s'appelle alors la* raison *de la suite.*

**Proposition 5.3.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de raison* $a$ *et de terme de rang* 0 *égal à* $\alpha$.
*1. Le terme général* $u_n$ *de la suite s'écrit* $u_n = na + \alpha$.
*2. La somme* $S_n$ *des* $(n+1)$ *termes vaut*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n(n+1)}{2} a + (n+1)\alpha.$$

**Preuve.-** Les deux se font par récurrence.
1. Le résultat est vrai pour $n = 0$. Soit $n$ un entier. Si $u_n = na + \alpha$, on a, par définition

$$u_{n+1} = u_n + a = na + \alpha + a = (n+1)a + \alpha.$$

2. Le résultat est vrai pour $n = 0$. Soit $n$ un entier. Si $S_n = \frac{n(n+1)}{2} a + (n+1)\alpha$, on a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{n(n+1)}{2} a + (n+1)\alpha + u_{n+1} = \left(\frac{n(n+1)}{2} + n + 1\right) a + (n+2)\alpha, \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) a + (n+2)\alpha. \square \end{aligned}$$

Une suite arithmétique est donc constante si, et seulement si, sa raison est nulle. Dans le cas contraire, on dispose du théorème 5.4, conséquence immédiate du point 1. de la proposition 5.3.

**Théorème 5.4.** *Une suite arithmétique réelle (*id est $(\alpha, a) \in \mathbb{R}^2$*) tend vers* $+\infty$ *si, et seulement si, sa raison est strictement positive et tend vers* $-\infty$ *si, et seulement si, sa raison est strictement négative.*

### 5.3. Suites géométriques

**Définition 5.5.** *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée* suite géométrique *si, et seulement si existe deux nombres complexes* $a$ *et* $\alpha$ *tels que*

$$u_0 = \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = au_n. \tag{5.3}$$

*Le nombre* $a$ *s'appelle alors la* raison *de la suite.*

**Remarque.-** Si la raison $a$ d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à 1, cette suite est alors arithmétique de raison nulle. Elle est donc constante, égale au terme de rang 0.

**Proposition 5.6.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* $a$ *et de terme de rang* 0 *égal à* $\alpha$.
*1. Le terme général* $u_n$ *de la suite s'écrit* $u_n = \alpha a^n$.
*2. Si la raison* $a$ *est différente de* 1*, la somme* $S_n$ *des* $(n+1)$ *termes vaut*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \alpha(1-a^{n+1})/(1-a).$$

**Preuve.-** On procède par récurrence.
1. Le résultat est vrai pour $n = 0$. Soit $n$ un entier. Si $u_n = \alpha a^n$, on a, par définition

$$u_{n+1} = au_n = \alpha a^{n+1}.$$

2. Le résultat est vrai pour $n = 0$. Soit $n$ un entier. Si $S_n = \alpha(1-a^{n+1})/(1-a)$, on a

$$S_{n+1} = \alpha\frac{1-a^{n+1}}{1-a} + \alpha a^{n+1} = \alpha\frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}(1-a)}{1-a} = \alpha\frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

**Théorème 5.7.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* $a$ *et de terme* $\alpha$ *de rang* 0 *non nul*
*1. Si* $|a| > 1$ *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*
*En particulier si* $(\alpha, a) \in \mathbb{R}^2$ *et si* $a > 1$*, elle tend vers* $+\infty$ *si* $\alpha > 0$ *et vers* $-\infty$ *si* $\alpha < 0$.
*2. Si* $|a| < 1$*, 0la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et de limite nulle.*
*3. Si* $a = 1$*, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante et si* $a = -1$*, elle est divergente.*

**Remarque.-** Si $a$ est négatif, on a $u_{n+1} = \alpha a^{n+1} = (-1)\alpha\,|a|\,u_n$. Deux termes consécutifs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de signes contraires : on dit que la suite est *alternée*.

**Preuve**
1. Traitons d'abord le cas $|a| > 1$. On pose $|a| = 1 + h$, avec $h > 0$. On montre alors, soit par récurrence, soit à l'aide de la formule du Binôme de Newton que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| = |\alpha|\,|a|^n > |\alpha|\,(1+nh).$$

Or toute suite arithmétique de raison $h > 0$ est positive, tend vers $+\infty$. La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, puisque la suite des valeurs absolues $(|a|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente.
En particulier, si $(\alpha, a) \in \mathbb{R}^2$ et $a > 1$, on a $u_n = \alpha\,|a|^n$ et la suite tend vers $\operatorname{sgn}(\alpha)\,\infty$.

2. Pour $a = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle. Supposons donc $0 < |a| < 1$. Il est clair que la suite $(|1/a|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ d'après le point 1. Donc la suite $(|a|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et il en est de même de la suite $(\alpha a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Le cas $a = 1$ a été traité en remarque ci-dessus et dans le cas $a = -1$, on a $u_n = \alpha(-1)^n$, suite non convergente selon des remarques antérieures.□

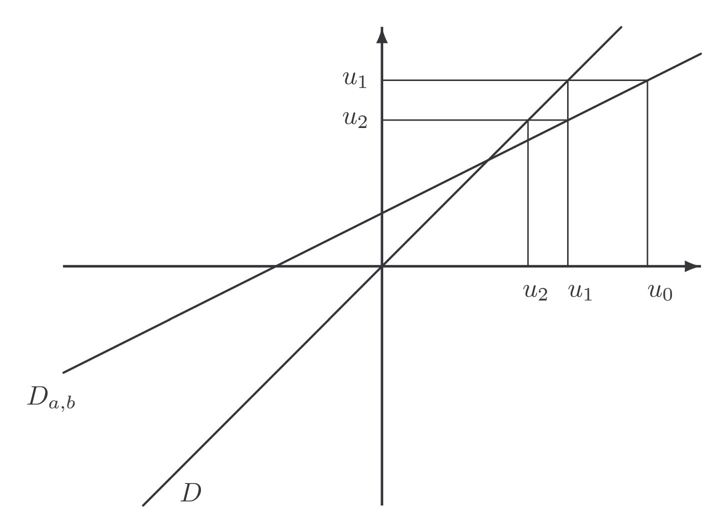
### 5.4. Suites récurrentes linéaires du premier ordre

Rappelons la définition, vue en début de paragraphe. *On se limitera ici au cas des suites réelles, pour des raisons d'interprétation graphique.*

**Définition 5.8.** *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée* suite récurrente linéaire du premier ordre *si, et seulement si existe trois réels* $a$*,* $b$ *et* $\alpha$ *tels que*

$$u_0 = \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = au_n + b. \tag{5.4}$$

**Remarques**
1. Si $a = 1$, on retrouve le cas des suites arithmétiques et si $b = 0$, celui des suites géométriques.
2. *Interprétation géométrique.* Soit $D_{a,b}$ la droite d'équation $y = ax + b$ et $D$ la droite d'équation $y = x$. Le point de coordonnées $(u_0, u_1)$ est situé sur la droite $D_{a,b}$. On place graphiquement $u_1$ sur l'axe des $x$ en recherchant le point d'intersection de la droite d'équation $y = u_1$ et de la droite $D$. L'abscisse de ce point est $u_1$. Plus généralement, si pour un entier $n$ les termes $u_1, \ldots, u_n$ sont placés sur l'axe des $x$, on placera $u_{n+1}$ de manière analogue à celle décrite pour $u_1$.




**Proposition 5.9.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire de terme général donné par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$, de terme de rang 0 égal à $\alpha$.*
*1. Le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit*

$$u_n = (\alpha - \frac{b}{1-a})a^n + \frac{b}{1-a}. \tag{5.5}$$

*2. la somme $S_n$ des $(n+1)$ termes vaut*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (\alpha - \frac{b}{1-a})\frac{1-a^{n+1}}{1-a} + (n+1)\frac{b}{1-a}.$$

**Preuve.-** Une première idée consiste à procéder par récurrence, en cherchant les premiers termes $u_1$, $u_2$ puis $S_1$, $S_2$ pour deviner la forme des termes généraux. Nous poposons ici la méthode classique qui consiste à se ramener au cas des suites géométriques. On cherche s'il existe un réel $\beta$ tel que la suite de terme général $v_n = u_n - \beta$ soit géométrique de raison $a$. Comme $u_{n+1} = au_n + b$ on obtient les équivalences, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \beta = a(u_n - \beta) \Leftrightarrow au_n + b - \beta = a(u_n - \beta) \Leftrightarrow b = \beta(1-a).$$

Comme $a$ est supposé différent de 1, il vient l'existence (et l'unicité) de $\beta = b/(1-a)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de terme de rang 0 égal à $u_0 - \beta = \alpha - \beta$ et de raison $a$. La proposition 5.6) donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\alpha - \beta)a^n$ d'où $u_n = (\alpha - \beta)a^n + \beta = \alpha a^n + \beta(1 - a^n)$.
On a alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(v_k + \beta) = \sum_{k=0}^{n} v_k + (n+1)\beta = (\alpha - \beta)\frac{(1-a^{n+1})}{1-a} + (n+1)\beta,$$

la dernière égalité venant de nouveau de la proposition 5.6.□

**Remarque.-** Le point de coordonnées $(\beta, \beta)$ est le point d'intersection des droites $D_{a,b}$ et $D$. On remarque que si $u_0 = \beta$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

**Théorème 5.10.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire de terme général donné par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$, de terme de rang 0 égal à $\alpha$.*
*1. Si $u_0 = b/(1-a)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
*2. Si $u_0 \neq b/(1-a)$, deux cas se présentent :*
*2.1. soit $|a| > 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente ;*
*2.2. soit $|a| < 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $b/(1-a)$.*

**Preuve**.- Ce théorème se déduit de l'expression 5.5 et des théorèmes sur les suites géométriques. Posons, comme ci-dessus, $\beta = b/(1-a)$.
1. Si $u_0 = \beta$ on a, pour tout $n$, $u_n = \beta$.
2.1. Si $|a| < 1$, la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\beta$.
2.2. Si $|a| > 1$, la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et il en est donc de même de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.□

### 5.5. Suites récurrentes linéaires du second ordre

#### 5.5.1. Définition et premières propriétés

**Définition 5.11.** *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée* suite récurrente linéaire du second ordre *si, et seulement si existe* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ *et* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ *tels que*

$$u_0 = \alpha \quad u_1 = \beta,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = bu_{n+1} + au_n. \tag{5.6}$$

On considère l'ensemble $S_{a,b}$ des suites vérifiant la relation 5.6

**Proposition 5.12.** *L'ensemble* $S_{a,b}$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* 2.

**Preuve**.
*i.* $S_{a,b}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
En effet, la suite nulle vérifie 5.6. Soit $((u_n),(v_n)) \in S_{a,b}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $(w_n) = \lambda(u_n) + (v_n)$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = bu_{n+1} + au_n, \qquad v_{n+2} = bv_{n+1} + av_n.$$

Il vient immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \lambda v_{n+2} = b(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + a(u_n + \lambda v_n),$$

soit $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = aw_{n+1} + bw_n$.
*ii.* L'application $\varphi : S_{a,b} \to \mathbb{C}^2$, $(u_n) \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
En effet, la définition des opérations algébriques sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ rend $\varphi$ linéaire. Avec les notations du *i*.

$$\varphi((w_n)) = (w_0, w_1) = (u_0 + \lambda v_0, u_1 + \lambda v_1) = (u_0, u_1) + \lambda(v_0, \lambda v_1),$$
$$= \varphi((u_n)) + \lambda\varphi((v_n)).$$

De plus

$$\varphi((u_n)) = 0 \Rightarrow u_0 = u_1 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0,$$

comme le montre une récurrence facile à partir de la relation 5.6.
Ainsi $S_{a,b}$ et $\mathbb{C}^2$ sont deux espaces vectoriels isomorphes. En particulier, $S_{a,b}$ est de dimension 2.

#### 5.5.2. Expression du terme général d'une suite récurrente linéaire du second ordre

On considère, dans la suite $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ fixé. On va déterminer une base de $S_{a,b}$ constituée de 2 suites dont les termes généraux sont d'expressions simples.
Traitons d'abord du cas particulier $a = b = 0$. On a alors

$$S_{a,b} = \left\{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ |\forall n \geq 2,\ u_n = 0\right\},$$

comme le montre une récurrence simple à partir de la relation 5.6. Une base de $S_{a,b}$ est alors constituée des deux suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ telles que

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0, \quad \forall n \geq 2,\ \alpha_n = 0\ ; \quad \beta_0 = 0,\ \beta_1 = 1, \quad \forall n \geq 2,\ \beta_n = 0.$$

Considérons $(a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Compte tenu de la forme de la relation 5.6, la recherche de suites géométriques semble pertinente, comme le montre le calcul ci-dessous. On suppose qu'il existe une suite géométrique $(r^n)$ de raison $r$ non nulle dans $S_{a,b}$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r^{n+2} = br^{n+1} + ar^n. \tag{5.7}$$

D'où, puisque $r \neq 0$,

$$r^2 - br - a = 0.$$

Cette équation est appelée *équation caractéristique* de $S_{a,b}$. On peut énoncer le :

**Théorème 5.13.** *Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, $S_{a,b}$.l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=bu_{n+1}+au_n$$

*et soit l'équation caractéristique associée*

$$r^2-br-a=0. \tag{5.8}$$

*Alors :*
*i. Si $\Delta=b^2+4a\neq 0$, on note $r_1$ et $r_2$ les deux racines disctinctes de l'équation 5.8. Une base de $S_{a,b}$ est formée des deux suites $(r_1^n)$ et $(r_2^n)$. De plus pour toute suite $(u_n)\in S_{a,b}$ on a*

$$(u_n)=\frac{u_0r_2-u_1}{r_2-r_1}\,(r_1^n)+\frac{u_1-u_0r_1}{r_2-r_1}\,(r_2^n)\,.$$

*ii. Si $\Delta=b^2+4a=0$, on note $r_0$ la racine double de l'équation 5.8. Une base de $S_{a,b}$ est formée des deux suites $(r_0^n)$ et $(nr_0^n)$. De plus pour toute suite $(u_n)\in S_{a,b}$ on a*

$$(u_n)=u_0\,(r_0^n)+\left(\frac{u_1}{r_0}-u_0\right)(nr_0^n)\,.$$

**Preuve**.
*i.* L'équation 5.8 possède deux racines disctinctes $r_1$ et $r_2$, les suites $(r_1^n)$ et $(r_2^n)$ appartiennent clairement à $S_{a,b}$ (la relation 5.8 entraine 5.7). De plus, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, on a

$$\lambda\,(r_1^n)+\mu\,(r_2^n)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=0\\ \lambda r_1+\mu r_2=0\end{array}\right.\Rightarrow\lambda=\mu=0,$$

puisque le déterminant du système linéaire est non nul.
Pour une suite $(u_n)\in S_{a,b}$, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $(u_n)=\lambda\,(r_1^n)+\mu\,(r_2^n)$. Il vient

$$(u_n)=\lambda\,(r_1^n)+\mu\,(r_2^n)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=u_0\\ \lambda r_1+\mu r_2=u_1\end{array}\right.\Rightarrow\lambda=\frac{u_0r_2-u_1}{r_2-r_1},\quad\mu=\frac{u_1-u_0r_1}{r_2-r_1}.$$

*ii.* L'équation 5.8 possède une racine double $r_0=b/2$. On note que l'existence d'une racine double impose $b\neq 0$. Ainsi $r_0$ est non nul. La suite $(r_0^n)$ appartient à $S_{a,b}$. Il reste à trouver un autre élément simple, pour former une base de $S_{a,b}$.
Comme racine double de l'équation 5.8 p, $r_0$ est également racine de $2r-b=0$. Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\left\{\begin{array}{l}r_0^{n+2}=br_0^{n+1}+ar_0^n\\ 2r_0^{n+2}=br_0^{n+1}\end{array}\right..$$

D'où, en multipliant la première ligne des égalités précédentes par $n$,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad(n+2)\,r_0^{n+2}=b\,(n+1)\,r_0^{n+1}+anr_0^n.$$

Ainsi, on justifie l'appartenance de la suite $(nr_0^n)$ à $S_{a,b}$. De plus, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, on a

$$\lambda\,(r_0^n)+\mu\,(nr_0^n)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=0\\ \lambda r_0+\mu r_0=0\end{array}\right.\Rightarrow\lambda=\mu=0,\ \text{car } r_0\neq 0.$$

Pour une suite $(u_n)\in S_{a,b}$, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $(u_n)=\lambda\,(r_0^n)+\mu\,(nr_0^n)$. Il vient

$$(u_n)=\lambda\,(r_0^n)+\mu\,(nr_0^n)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=u_0\\ \lambda r_0+\mu r_0=u_1\end{array}\right.\Rightarrow\lambda=u_0,\quad\mu=\frac{u_1}{r_0}-u_0.\Box$$

**Remarque**.- Le théorème 5.13 joint aux résultats sur les suites géométriques, permet d'étudier la convergence des éléments de $S_{a,b}$.

## 6. Annexe : vocabulaire pour la comparaison entre les suites

*Cette section est écrite pour des suites numériques. Le lecteur pourra à titre d'exercice étudier les (faibles) modifications à faire pour passer aux suites à valeurs complexes.*

### 6.1. La relation de domination

**Définition 6.1.** *Soit* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*. On dit que* $(u_n)$ *est* dominée *par* $(v_n)$ *s'il existe* $K \in \mathbb{R}_+^\star$ *et* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$\forall n \geq n_0, \qquad |u_n| \leq K\, |u_n|\,.$$

**Notation**.- Si $(u_n)$ est dominée par $(v_n)$, on notera $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ ou encore $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$ s'il y avait, par exemple, ambiguïté avec un autre paramètre dont $u_n$ ou $v_n$ dépendrait.

**Exemple 6.2.** *Pour les suites* $(n^a)$ *et* $(n^b)$ *(a et b réels) on a* $n^a = \mathrm{O}(n^b)$ *si et seulement si* $a \leq b$.

On peut considérer la relation O comme une relation binaire sur les couples de suites. Cette relation est *réflexive* et *transitive* (preuve facile). De plus :

**Proposition 6.3.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *quatre suites numériques et* $\lambda \in \mathbb{R}$ .
*1. Si* $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ *et* $v_n = \mathrm{O}(w_n)$*, alors* $u_n + v_n = \mathrm{O}(w_n)$ *et* $\lambda u_n = \mathrm{O}(w_n)$.
*2. Si* $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ *et* $v_n = \mathrm{O}(t_n)$ *alors* $u_n v_n = \mathrm{O}(w_n t_n)$.

**Remarque**.- *Attention :* dans les mêmes conditions il est en général faux que l'on ait $u_n + v_n = \mathrm{O}(w_n + t_n)$. Trouvez un contre-exemple !

### 6.2. La relation de prépondérance

**Définition 6.4.** *Soit* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*. On dit que* $(u_n)$ *est* négligeable devant $(v_n)$ *ou que* $(v_n)$ *est* prépondérante devant $(u_n)$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon\, |v_n|)\,.$$

**Notation**.- Si $(u_n)$ est négligeable devant $(v_n)$ on note $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ ou encore $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.

**Exemples 6.5.**
*1. On a* $n^a = \mathrm{o}(n^b)$ *si et seulement si* $a < b$.
*2. Pour tout triplet* $(\alpha, a, b)$ *de réels avec* $\alpha > 0$, $a > 0$ *et* $b > 1$*, on a*

$$(\ln n)^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta) \ \ ; \ \ n^a = \mathrm{o}(b^n) \ \ ; \ \ b^n = \mathrm{o}(n!).$$

Comme pour la relation de domination, la relation o est une relation binaire sur les couples de suites. Cette relation est *transitive* (preuve facile) et de plus :

**Proposition 6.6.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *quatre suites numériques et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
*1. Si* $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ *et* $v_n = \mathrm{o}(w_n)$*, alors* $u_n + v_n = \mathrm{o}(w_n)$ *et* $\lambda u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
*2. Si* $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ *et* $v_n = \mathrm{o}(t_n)$ *alors* $u_n v_n = \mathrm{o}(w_n t_n)$.

**Remarque.**- *Attention* : dans les mêmes conditions il est en général faux que l'on ait $u_n + v_n = \mathrm{o}(w_n + t_n)$. Ici aussi, trouvez un contre-exemple !

La proposition 6.6 se démontrera par exemple à l'aide de la caractérisation suivante de la relation de domination. On prend d'ailleurs parfois cette caractérisation comme définition.

**Proposition 6.7.** *Soit* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*. Sont équivalentes :*
*1.* $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ *;*
*2. Il existe une suite* $w_n$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ *et, pour n assez grand,* $u_n = v_n w_n$.

**Preuve**.
[1 ⇒ 2]
*Définition de* $w_n$.- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Si } v_n = 0 \text{ alors } w_n = 0, \text{ sinon } w_n = u_n/v_n.$$

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (n \geq m_0 \Rightarrow |u_n| \leq |v_n|)\,.$$

On remarque que, pour tout $n \geq m_0$, on a $u_n = w_n v_n$ puisque si $v_n$ est nul $u_n$ l'est aussi.

*Convergence de $w_n$*.- Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, que l'on peut prendre supérieur à $m_0$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (n \geq m_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon\,|v_n|)\,.$$

D'où (que $v_n$ soit nul ou non)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (n \geq m_0 \Rightarrow |w_n| \leq \varepsilon)\,.$$

[$2 \Rightarrow 1$] Il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m_0$, $u_n = v_n w_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(w_n)$ tend vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, que l'on peut prendre supérieur à $m_0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (n \geq m_0 \Rightarrow |w_n| \leq \varepsilon)\,.$$

Comme, pour tout $n \geq m_0$, $u_n = v_n w_n$, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (n \geq m_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon\,|v_n|)\,.\square$$

**Remarque**.- En particulier, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = 0$.

### 6.3. La relation d'équivalence

**Définition 6.8.** *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)$ est* équivalente *à $(v_n)$ si la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)$.*

**Notation**.- Si $(u_n)$ est équivalente à $(v_n)$, on notera $u_n \sim v_n$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

**Exemple 6.9.** *Formule de Stirling :* $n! \sim n^n \exp(-n)\sqrt{2\pi n}$.

La caractérisation suivante de l'équivalence est parfois prise comme définition :

**Théorème 6.10.** *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
*1. $u_n \sim v_n$ ;*
*2. Il existe une suite $(\theta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 1$ et, pour $n$ assez grand, $u_n = \theta_n v_n$.*

**Preuve -** On utilise essentiellement la proposition 6.7. On a en effet

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\Leftrightarrow u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n),\\ &\Leftrightarrow \exists w_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ \left(\lim_{n\to+\infty} w_n = 0 \text{ et } u_n - v_n = w_n v_n \text{ (pour } n \text{ assez grand)}\right),\\ &\Leftrightarrow \exists w_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ \left(\lim_{n\to+\infty} w_n = 0 \text{ et } u_n = (1+w_n) v_n \text{ (pour } n \text{ assez grand)}\right). \end{aligned}$$

On pose $\theta_n = 1 + w_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.$\square$

Donnons deux conséquences directes.

**Corollaire 2.** *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que $(v_n)$ possède une limite $l$ pour $n \to +\infty$. Alors $(u_n)$ possède la même limite $l$ pour $n \to +\infty$.*

Il faut se méfier de vouloir écrire une réciproque à ce résultat. On vérifie facilement que si $(u_n)$ et $(v_n)$ possèdent la même limite $l$ **non nulle**, alors $u_n \sim v_n$. En revanche si $(u_n)$ et $(v_n)$ tendent toutes deux vers 0 ou vers $\pm\infty$, elles n'ont aucune raison d'être équivalentes.

**Corollaire 3.** *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $(v_n)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors $(u_n)$ est équivalente à $(v_n)$ si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = 1$.

**Théorème 6.11.** *La relation ‹‹ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ›› est une relation d'équivalence sur les suites.*

**Preuve -** On utilise essentiellement la proposition 6.10. Soit $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites numériques.
*i. La relation $\sim$ est réflexive.* En effet $u_n - u_n = 0 = \mathrm{o}\,(u_n)$.
*ii. La relation $\sim$ est symétrique.* En effet, si $u_n \sim v_n$ il existe une suite $(\theta_n)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 1$. et, pour $n$ assez grand, $u_n = \theta_n v_n$. On a alors, pour $n$ assez grand, $v_n = \theta_n^{-1} u_n$ (puisque $(\theta_n)$ ne s'annule pas pour $n$ assez grand). Comme $\lim_{n\to+\infty} \theta_n^{-1} = 1$ (*cf.* proposition 2.11) on a $v_n \sim u_n$.
*iii. La relation $\sim$ est transitive.*- En effet, si $u_n \sim v_n$ (*resp.* $v_n \sim w_n$), il existe une suite $(\theta_n)$ (*resp.* $(\theta'_n)$) telle que $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 1$. (*resp.* $\lim_{n\to+\infty} \theta'_n = 1$) et $u_n = \theta_n v_n$ (*resp.* $v_n = \theta'_n w_n$) pour $n$ assez grand. Alors, pour $n$ assez grand, $u_n = \theta_n \theta'_n w_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \theta_n \theta'_n = 1$ (*cf.* théorème 2.7).$\square$

**Proposition 6.12.** *Soit* $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$ *et* $(t_n)$ *quatre suites numériques. Si* $u_n \sim w_n$ *et* $v_n \sim t_n$ *alors* $u_n v_n \sim w_n t_n$.

La **Preuve** est immédiate, notamment grâce à la proposition 6.10.

**Remarque**.- *Attention :* dans les mêmes conditions il est en général faux que l'on ait, $u_n + v_n \sim w_n + t_n$. Trouvez un contre-exemple !

On peut énoncer d'autres résultats concernant la composition de suites avec des fonctions classiques. Il faut en retenir qu'ils sont assez délicats. Donnons un exemple :

**Proposition 6.13.** *Soit* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On suppose que* $u_n \sim v_n$ *et que* $(v_n)$ *possède une limite* $l \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ ***différente de*** $1$. *Alors les suites* $(\ln u_n)$ *et* $(\ln v_n)$ *sont définies à partir d'un certain rang et vérifient* $\ln u_n \sim \ln v_n$.

**Preuve**.
*i.* Si $l \in \mathbb{R}_+^*$, alors la suite $(u_n)$ tend aussi vers $l$ d'après le corollaire 2. Comme $l$ est non nulle, les suites $(\ln u_n)$ et $(\ln v_n)$, quitte à les tronquer de leurs premiers termes, sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème 2.10 entraine que $(\ln u_n)$ et $(\ln v_n)$ tendent chacune vers $\ln l \neq 0$, puisque $l \neq 1$. Alors $\lim_{n\to+\infty} (\ln u_n) / \ln v_n = 1$ et $\ln u_n \sim \ln v_n$.
*ii.* Si $l = +\infty$, il existe une suite $(\theta_n)$ telle que, pour $n$ assez grand, on ait $u_n = \theta_n v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 1$. Comme $(u_n)$ et $(\theta_n)$ sont strictement positives, $(v_n)$ strictement supérieure à 1 pour $n$ assez grand, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq m_0, \qquad \ln u_n = \ln \theta_n + \ln v_n = \ln v_n \left(1 + \frac{\ln \theta_n}{\ln v_n}\right).$$

Posons $\theta_n' = 1 + (\ln \theta_n) / \ln v_n$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln \theta_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln v_n = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} \theta_n' = 1$ et $\ln u_n \sim \ln v_n$.□

**Remarques**.
*i.* Avec les notations de la proposition 6.13, toutes les situations peuvent se produire si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$. Par exemple, si $u_n = 1 + 1/(n+1)$ et $v_n = 1$ (*resp.* $v_n = 1 + 1/\sqrt{n+1}$) pour tout $n$ on a $\ln v_n = o(\ln u_n)$ (*resp.* $\ln u_n = o(\ln v_n)$). Le lecteur pourra imaginer des situations où les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ne sont pas comparables.
*ii.* L'hypothèse $u_n \sim v_n$ n'entraine pas en général un résulat semblable sur l'exponentielle des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, comme le montre le contre-exemple des suites $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2+n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cependant on a le réusltat suivant.

**Proposition 6.14.** *Soit* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On a* $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$ *si, et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

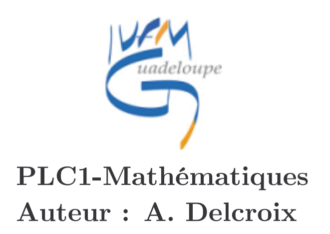
**Preuve**.
*i.* Supposons $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$. D'après le théorème 6.10 il existe une suite $(\theta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 1$ et $\exp(u_n) = \theta_n \exp(v_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'égalité précédente entraine que la suite $(\theta_n)$ est à valeurs strictement positives. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ln \theta_n + v_n$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \ln(\theta_n) = 0$.
*ii.* Réciproquement, si $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, posons $w_n = u_n - v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(u_n) = \exp(w_n)\exp(v_n),$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \exp(w_n) = 1$. D'où $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$.□




**PLC1-Mathématiques**
**Auteur : A. Delcroix**

# NOTIONS DE LIMITE
pour une fonction de la variable réelle
Application à l'étude des branches infinies

## 1. INTRODUCTION

On a rassemblé dans ce document les diverses notions de limites qu'on est susceptible de rencontrer dans l'étude d'une fonction de la variable réelle : limite (sous entendue finie) en un point $a \in \mathbb{R}$, en $+\infty$ et en $-\infty$, fonctions tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Lorsqu'on réalise un tel document pour la préparation de l'écrit, la question du cadre mathématique choisi ne se pose guère. Tout invite à se placer au niveau du programme complémentaire, ce qui revient à celui usuellement enseigné en L1/L2 ou en DEUG. Des nuances peuvent cependant être apportées aux choix faits. Pour l'oral, la question mérite une analyse plus fine. Ceci est discuté de manière plus fine dans la sous section ci-dessous.

### 1.1. Choisir un cadre

La première difficulté à laquelle on est confronté dans la préparation d'un exposé d'oral 1 du CAPES est celui du niveau auquel on se place. Voici quelques approches.

(1) La première consiste à se restreindre au niveau du programme des classes du secondaire. Les définitions formelles de la notion de limite en ‹‹ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ ›› sont proscrites à ce niveau. Mais, dans leur dernière évolution, les programmes réintroduisent dans les sections scientifiques des définitions quasiment rigoureuses (en singeant en langue quotidienne la définition formelle). Cela constitue un progrès sur le plan de la rigueur par rapport au stade précédent. En effet, on y définissait la notion de limite en terme de condition suffisante, par comparaison avec des fonctions de référence. Par exemple, comment alors prendre la négation de la propriété "$f$ possède une limite $l$ en $a$" ? Cependant, les manipulations de la définition actuelle restent très limitées et assez peu efficaces, dans le contexte d'une leçon d'oral 1. Pour en revenir à l'exemple déjà cité, prendre la négation d'un énoncé en langue quotidienne est plus difficile que prendre celle de son équivalent formalisé. Il est donc finalement assez piégeux de se placer à ce niveau. On déconseille donc cette approche.

(2) On a donc choisi ci-dessous de faire appel aux ressources du programme complémentaire et on utilise la définition de début de DEUG. Par exemple, pour la notion de limite en un point, on suppose donnés un intervalle $I$ contenant $a$, non réduit à $a$, $f$ une fonction définie sur $I$ sauf éventuellement en $a$. On dit que $l$ est limite de $f$ pour $x$ tendant vers $a$ si l'on a

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \eta > 0) \quad (\forall x \in I) \quad (0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

(3) Une variante (pour les limites en un point $a \in \mathbb{R}$) consiste à introduire la notion de *limite suivant une partie*. L'avantage est que les notions de limite, de limite à gauche, de limite à droite tombent comme autant de cas particuliers : c'est ce que nous faisons ci-dessous mais c'est un choix que l'on peut contester.

(4) La démarche, décrite en (2) ou en (3) présente également l'avantage d'unifier la préparation à l'écrit et à l'oral.

(5) Remarquons que dans ces approches les notions de limites en $+\infty$ et en $-\infty$ (ou de fonctions tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$) sont abordées à part, alors qu'il s'agit fondamentalement du même concept. Mais une approche plus générale de la notion de limite (par exemple à l'aide de notions topologiques comme celle de voisinage) qui unifie les différents cas semble trop ambitieuse (et hors programme) dans le cadre du CAPES. Elle risque de conduire dans certains cas au hors sujet, ne serait-ce que par l'intitulé actuel des sujets d'exposés forcément limitatif.

On détaille ci-dessous la notion de limite finie en un point de $\mathbb{R}$ pour des fonctions à valeurs réelles ou complexes et on donne les principales propriétés. Un complément sera apporté pour les fonctions tendant vers $\pm\infty$.

On aborde ensuite la notion de limite finie en $+\infty$ (ou en $-\infty$) puis de fonctions tendant vers $\pm\infty$ en laissant en général les démonstrations en exercice lorsqu'elles sont une simple adaptation de celles du cas précédent.

Enfin, les conséquences sur la représentation graphique de la fonction sont données : c'est l'étude des branches infinies.

### 1.2. Notations et rappels

Nous rappelons ci-dessous quelques notions concernant la topologie (le mot est bien grand !) de $\mathbb{R}$ essentiellement pour fixer les notations et les concepts utilisés dans la suite. Nous supposerons connues les propriétés usuelles des intervalles de $\mathbb{R}$ et les notions classiques sur les fonctions : ensemble de définition, opérations sur les fonctions, composition des fonctions et fonction réciproque.

**Notation**.- On notera $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

**Définitions 1.** *Soit* $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
(*i*) *Si* $a \in \mathbb{R}$, *On dit qu'un intervalle* $I$ *est* voisinage *de* $a$ *s'il existe un intervalle ouvert* $J$ *contenant* $a$ *et et inclus dans* $I$.
(*ii*) *Si* $a = +\infty$ *(resp.* $a = -\infty$*) on dit qu'un intervalle* $I$ *est* voisinage *de* $a$ *s'il existe un intervalle du type* $]b, +\infty[$ *resp.* $]-\infty, b[$ *inclus dans* $I$.

Par exemple, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, l'intervalle du type $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ est voisinage de $a$. Tout intervalle voisinage de $+\infty$ est de la forme $]\alpha, +\infty[$ ou bien $[\alpha, +\infty[$.

**Définition 2.** *On dit qu'un point* $a$ *est intérieur à une partie* $B$ *de* $\mathbb{R}$ *s'il existe un intervalle* $J$*, voisinage de* $a$ *inclus dans* $B$.

En particulier, tout point d'un intervalle ouvert $I$ est intérieur à $I$. D'une manière plus générale, pour un intervalle $I$ quelconque, seule une borne (lorsqu'elle existe) n'est pas un point intérieur.

**Proposition-Définition 3.** *Soit* $A$ *une partie de* $\mathbb{R}$ *et* $a$ *un réel. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *Il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* $A$ *qui converge vers* $a$ *;*
(2) *Tout intervalle ouvert* $I$*, voisinage de* $a$*, contient un point de* $A$ *(autrement dit, l'intersection de* $A$ *et de* $I$ *n'est pas vide).*
*S'il l'une des assertions précédentes est vérifiée on dit que* $a$ est adhérent à $A$.

En particulier, tout point de $A$ est adhérent à $A$. Pour un intervalle $I$, sa borne inférieure (*resp.* supérieure), lorsqu'elle existe, est un point adhérent à $A$. On notera $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à $A$. Cet ensemble est appelé l'*adhérence* de $A$.

**Preuve** de la proposition-définition 3.
$[1 \Rightarrow 2]$ Soit $I$ un intervalle ouvert voisinage de $a$. il existe $J$ un intervalle (on vérifie qu'on peut le prendre de la forme $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$) tel que $a \in J \subset I$. Considérons alors une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$ qui converge vers $a$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \varepsilon).$$

En particulier, on a $|u_{n_0} - a| < \varepsilon$ et le point $u_{n_0}$ convient.

$[2 \Rightarrow 1]$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $I_n = ]a - 1/(n + 1), a + 1/(n + 1)[$ est voisinage de $a$ : il existe donc par hypothèse un réel $a_n$ tel que $a_n \in I_n \cap A$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers $a$, car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| < 1/(n + 1)$.□

## 2. LIMITE EN UN POINT DE $\mathbb{R}$

### 2.1. Définition et premières conséquences

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un réel adhérent à $A$ et $f$ une fonction à valeurs réelles (*resp.* complexes) dont l'ensemble de définition contient $A$.

**Définition 4.** *On dit qu'un réel* (resp. *complexe*) $l$ *est* limite de $f$ pour $x$ tendant vers $a$, $x$ appartenant à $A$, *ou que* $f$ tend vers $l$ pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$ *si l'on a*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x \in A) \quad (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\,. \tag{2.1}$$

**Remarques**
(1) Si $a \in \overline{A} \backslash A$ alors $A$ contient au moins une suite tendant vers $a$, ce qui donne un sens à la définition.
(2) Si $a \in A$ et si $f$ possède une limite pour $x$ tendant vers $a$ suivant $A$, alors $f$ est définie en $a$ et on a nécessairement $f(a) = l$.
En effet $x = a$ réalise les deux conditions $x \in A$ et $\mid x - a \mid < \eta$, pour tout $\eta > 0$. On en déduit $\forall \varepsilon > 0, \mid f(a) - l \mid < \varepsilon$. D'où $f(a) = l$.

**Proposition-Définition 5.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes*) *définie sur $A$. Soit $l$ et $l'$ deux réels* (resp. *complexes*) *tels que $l$ et $l'$ soient limite de $f$ pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$. Alors $l = l'$.*
*Lorsqu'il existe, le réel* (resp. *complexe*) *$l$ vérifiant la propriété 2.1 sera appelé* la limite *de $f$ pour $x$ tendant vers $a$ et on le notera*

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) \quad \textit{ou bien} \quad \lim\nolimits_{x \to a, x \in A} f(x).$$

**Preuve**.- Nous donnons deux démonstrations de ce résultat.
*1. Une preuve par l'absurde*.- Suppposons $l \neq l'$. Pour $\varepsilon = |l' - l|/3$ (qui est par hypothèse strictement positif), il existe $\eta > 0$ et $\eta' > 0$ tels que

$$(\forall x \in A)\ (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\ ;\ (\forall x \in A)\ (|x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon)\,.$$

Comme $a \in \overline{A}$, il existe $x \in A$ tel que $\mid x - a \mid < \inf(\eta, \eta')$. Pour un tel $x$ on a

$$|l - l'| \leq |f(x) - l'| + |f(x) - l| < 2\varepsilon = 2\,|l' - l|/3.$$

Ce qui conduit à une absurdité.□
*2. Une preuve directe*.- Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et $\eta' > 0$ tels que

$$(\forall x \in A)\ (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon/2)\ ;\ (\forall x \in A)\ (|x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon/2)\,.$$

Comme $a \in \overline{A}$, il existe $x \in A$ tel que $\mid x - a \mid < \inf(\eta, \eta')$. Pour un tel $x$ on a

$$|l - l'| \leq |f(x) - l'| + \mid f(x) - l < \varepsilon.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |l - l'| < \varepsilon.$$

D'où $l = l'$.□

**Remarques**.- L'existence d'une limite et les propriétés liées à cette existence sont locales, comme le montrent les propositions suivantes (qui peuvent être omises dans une leçon d'oral).

**Proposition 2.1.** *Soit $I$ un intervalle voisinage de $a$, $l$ un nombre réel* (resp. *complexe*) *et $f$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes*) *définie sur $A$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
*(1) La fonction $f$ tend vers $l$ pour $x$ tendant vers $a$ suivant $A$ ;*
*(2) La fonction $f$ tend vers $l$ pour $x$ tendant vers $a$ suivant $A \cap I$.*

**Preuve**
[$1 \Rightarrow 2$] C'est immédiat. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\forall x \in A) \quad (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\,.$$

A fortiori, on a : $(\forall x \in A \cap I) \quad (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

[$2 \Rightarrow 1$] Comme $I$ est voisinage de $a$, il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $]a - \alpha, a + \alpha[$ soit inclus dans $I$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $(\forall x \in A \cap I)\,,\ (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.
Posons $\eta' = \min(\alpha, \eta)$ et considérons $x \in A$ tel que $|x - a| < \eta'$. On a $x \in ]a - \alpha, a + \alpha[ \subset I$ et $|x - a| < \eta$. D'où $|f(x) - l| < \varepsilon$. D'où

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \eta' > 0) \quad (\forall x \in A) \quad (|x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\,.\square$$

**Proposition 2.2.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes) définie sur $A$. Si $f$ possède une limite pour $x$ tendant vers $a$ suivant $A$, la fonction $f$ est localement bornée sur l'ensemble $A$ au voisinage de $a$ : il existe un intervalle $I$ voisinage de $a$ et un réel $M > 0$ tel que : $\forall x \in A \cap I,\ \ |f(x)| < M$.*

**Preuve**.- On prend $\varepsilon = 1$. Pour $\eta$ relatif à cette valeur de $\varepsilon$, on a, en particulier

$$\forall x \in A \cap ]a-\eta, a+\eta[,\ \ |f(x)| < |l| + 1.$$

On prend donc $I = ]a-\eta, a+\eta[$ et $M = |l| + 1$.□

**Théorème 2.3.** *Soit $A$ et $A'$ deux parties de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $A$ et à $A'$ et $f$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes) dont l'ensemble de définition contient $A \cup A'$. Soit encore $l$ un réel* (resp. *complexe). On a équivalence entre les propriétés suivantes*

$$l = \lim_{x\to a, x\in A} f(x) \ \text{ et } \ l = \lim_{x\to a, x\in A'} f(x), \tag{2.2}$$

$$l = \lim_{x\to a, x\in A\cup A'} f(x). \tag{2.3}$$

**Preuve**.- Remarquons que si $a \in \overline{A} \cap \overline{A}'$ alors $a \in \overline{A \cup A}'$, ce qui donne un sens à (2.3).
[2.2 ⇒ 2.3] Pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que simultanément

$$(\forall x \in A)\ (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) \ \text{ et } \ (\forall x \in A')\ (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Alors : $(\forall x \in A \cup A')\ \ (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.
D'où le résultat.
[2.3 ⇒ 2.2] C'est immédiat, puisque $A \subset A \cup A'$ et $A' \subset A \cup A'$.□

### 2.2. Cas particuliers fondamentaux

On se donne une fonction $f$ dont on note $\mathrm{def}(f)$ l'ensemble de définition, une partie $A$ contenue dans et $a$ un point adhérent $A$.

#### 2.2.1. Le cas ou $a \in \mathrm{def}(f)$, $A = \mathrm{def}(f)$

La limite de $f$ pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$, s'appelle alors la *limite de $f$ pour $x$ tendant vers $a$*. On la note, quand elle existe, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Dans ce cas, et selon une remarque ci-dessus, la limite $l$ de $f$ vérifie, lorsqu'elle existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. On dit alors que $f$ est *continue* au point $a$.

*Ce cas ne sera pas considéré dans ce document.*

#### 2.2.2. Le cas ou $A = \mathrm{def}(f) \setminus \{a\}$

Dans ce cas, la limite de $f$ pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$, s'appelle la *limite de $f$ pour $x$ tendant vers $a$, $x$ différent de $a$* ou encore *la limite de $f$ pour $x$ tendant vers $a$, par valeurs différentes de $a$*. On la note, quand elle existe, $\lim_{x\to a, x\neq a} f(x)$. On omet la précision par valeurs différentes de $a$ lorsque le contexte est clair.

#### 2.2.3. Limites unilatérales (*id est* limite à gauche ou limite à droite)

On suppose que $A = \mathrm{def}(f) \cap ]-\infty, a[$ (*resp.* $A = \mathrm{def}(f) \cap ]a, +\infty[$). Si $f$ possède une limite, pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$, on dit que $f$ possède une *limite à gauche* (*resp. limite à droite*) pour $x$ tendant vers $a$, $x$ différent de $a$. On note $\lim_{x\to a, x<a} f(x)$ ou encore $\lim_{x\to a^-} f(x)$ (*resp.* $\lim_{x\to a, x>a} f(x)$ ou encore $\lim_{x\to a^+} f(x)$).
*Nous omettrons dans la suite la précision $x$ différent de $a$.*

**Remarque**.- En prenant $A = \mathrm{def}(f) \cap ]-\infty, a]$ (*resp.* $A = \mathrm{def}(f) \cap [a, +\infty[$), on aboutit à une autre notion de limite à gauche (*resp.* à droite), liée à la continuité à gauche (*resp.* à droite). Ces deux dernières seront reprises dans le chapitre suivant et nous réserverons le vocabulaire de limite à gauche ou à droite aux cas ci-dessus.

On dispose du théorème suivant, corollaire du théorème 2.3.

**Théorème 2.4.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $I$ un intervalle contenant $a$. Soit encore $f$ une fonction définie sur $I$ sauf éventuellement au point $a$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(1) $f$ possède une limite pour $x$ tendant vers $a$, $x$ différent de $a$ ;*
*(2) $f$ possède une limite à gauche $l$ et une limite à droite $l'$, pour $x$ tendant vers $a$ et ces limites sont égales.*

### 2.3. Propriétés des limites

#### 2.3.1. Théorèmes de comparaison et prolongement d'inégalités

**Attention** : *les propriétés de ce paragraphe sont spécifiques aux fonctions à valeurs réelles.*

**Théorème 2.5.** *Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $A$, $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient $A$. On suppose que*

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq g(x) \tag{2.4}$$

*et que $f$ tend vers $l$, $g$ vers $l'$ pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$. Alors on a $l \leq l'$.*

**Remarques**
(1) Ce résultat est un théorème de *prolongement* d'inégalité.
(2) Si l'inégalité large dans (2.4) est remplacée par une inégalité stricte la conclusion reste une inégalité large.
Par exemple, considérons $A = \mathbb{R}_+^*$, et les fonctions $f$ et $g$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x, \quad g(x) = x + x^2.$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) < g(x)$. Pourtant $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$.
Indication de **preuve.-** On pourra procéder par l'absurde en supposant $l > l'$.

**Théorème 2.6.** *Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $A$, $f$, $g$ et $h$ trois fonctions à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient $A$ et vérifiant*

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \tag{2.5}$$

*On suppose que $f$ et $g$ tendent vers la même limite vers $l$ pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$. Alors $h$ tend vers $l$ pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$.*

**Preuve.**- Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, simultanément, pour tout $x \in A$ on a

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \qquad |x - a| < \eta \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon.$$

D'où, pour tout $x \in A$ vérifiant $|x - a| < \eta$, les inégalités

$$l - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \varepsilon.$$

Puis, sous les mêmes hypothèses $|h(x) - l| < \varepsilon.\square$
Ce théorème est parfois appelé théorème des gendarmes, l'inégalité 2.5 étant une hypothèse d'encadrement.

#### 2.3.2. Propriétés algébriques

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $A$ et soit $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles ou complexes dont l'ensemble de définition contient $A$.

**Théorème 2.7.** *On suppose que $f$ (resp. $g$) possède une limite $l$ (resp. $l'$) pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$. Alors :*
*(1) la fonction $f + g$ admet $l + l'$ comme limite pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$ ;*
*(2) pour tout scalaire $\lambda$, la fonction $\lambda f$ admet $\lambda l$ comme limite pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$ ;*
*(3) la fonction $fg$ admet $ll'$ comme limite pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$.*

Nous commencons par énoncer deux lemmes (le premier est une remarque triviale) utiles pour la preuve du théorème 2.7.

**Lemme 2.8.** *Soit $B$ une partie de $\mathbb{R}$, $b$ un réel adhérent à $B$, $\varphi$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes) dont l'ensemble de définition contient $B$ et $l$ un réel* (resp. *complexe) . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

$$1. \ \lim_{x\to a, x\in A} \varphi(x) = l \qquad 2. \ \lim_{x\to a, x\in A} (\varphi(x) - l) = 0.$$

**Lemme 2.9.** *Soit $B$ une partie de $\mathbb{R}$, $b$ un réel adhérent à $B$. Soit $\varphi$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes) tendant vers 0 pour $x$ tendant vers $b$, suivant $B$ et $\psi$ une fonction définie et bornée sur $B$. Alors la fonction $\varphi\psi$ tend vers 0 pour $x$ tendant vers $b$, suivant $B$.*

*Preuve du lemme 2.9.***-** Soit $M$ un réel non nul tel que

$$\forall x \in B, | \psi(x) |< M.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\forall x \in B)\,,\ (|x-b| < \eta \Rightarrow |\varphi(x)| < \varepsilon/M)\,.$$

On a alors pour $x \in B$ tel que $|x-b| < \eta$, $|\varphi(x)\psi(x)| < \varepsilon$.□

**Preuve du théorème 2.7**
(1) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ et $\eta' > 0$ tels que

$$(\forall x \in A)\ \ (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon/2)\ \ ;\ \ (\forall x \in A)\ \ (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon/2)\,.$$

Posons $\eta'' = \min(\eta, \eta')$. Pour $x \in A$ tel que $|x-a| < \eta''$, il vient

$$|f(x) + g(x) - (l + l')| \leq |f(x) - l| + |g(x) - l'| < \varepsilon.$$

2. On utilise le lemme 2.9 avec $\varphi = f - l$ et $\psi = \lambda$. La fonction $x \mapsto \lambda(f(x) - l)$ tend donc vers 0 pour $x$ tendant vers $a$ suivant $A$ et la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$ vers $\lambda l$.

3. On va montrer que la fonction $x \mapsto f(x)g(x) - ll'$ tend vers 0 pour $x$ tendant vers $a$ suivant $A$. Or

$$f(x)g(x) - ll' = (f(x) - l)g(x) + l(g(x) - l').$$

La fonction $g$, admettant une limite en $a$ suivant $A$ est localement bornée : il existe $I$ voisinage de $a$ tel que $g$ soit bornée $A \cap I$. La fonction $x \mapsto (f(x) - l)$ tend vers 0 pour $x$ tendant vers $a$ suivant $A$ et donc aussi suivant $A \cap I$. Le lemme 2.9 s'applique : la fonction $x \mapsto (f(x) - l)g(x)$ tend vers 0 pour $x$ tendant vers $a$ suivant $A$.
D'après le point 2. de ce théorème la fonction $x \mapsto l(g(x) - l')$ tend vers 0 pour $x$ tendant vers $a$ suivant $A$. Le point 1. du théorème entraine alors que la fonction $x \mapsto f(x)g(x) - ll'$ tend vers 0 pour $x$ tendant vers $a$ suivant $A$.□

### 2.3.3. Théorème de composition des limites

**Théorème 2.10.** *Soit $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $A$, $b$ un réel et $l$ un réel* (resp. *complexe). Soit $f$ une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient $A$ et $g$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes) dont l'ensemble de définition contient $B$. On suppose de plus que $f(A) \subset B$ de sorte que $g \circ f$ soit définie sur $A$.*
*Si $f$ admet $b$ comme limite en $a$ suivant $A$ et si $g$ admet $l$ comme limite en $b$ suivant $B$ alors $g \circ f$ admet $l$ comme limite en $a$ suivant $A$.*

**Preuve**.- Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$(\forall y \in B)\ \ (|y-b| < \delta \Rightarrow |g(y) - l| < \varepsilon)\,.$$

Relativement à $\delta$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\forall x \in A)\ \ (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \delta)\,.$$

Comme $f(A) \subset B$, il vient (en faisant ‹‹ jouer à $f(x)$ le rôle de $y$ ››)

$$(\forall x \in A)\ \ (|x-a| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - l| < \varepsilon)\,.$$

D'où le résultat.□

**Remarque**.- La condition $f(A) \subset B$ est nécessaire comme le montre le classique contre-exemple suivant. On prend $A = \mathbb{R}^*$, $B = \mathbb{R}^*$, $a = 0$, $b = 0$, $l = 0$ et on définit $f$ et $g$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ f(x) = x \sin\frac{1}{x},\ f(0) = 0\ \ ;\ \ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ g(y) = 0,\ g(0) = 1.$$

On a alors $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = 0$ et $\lim_{y\to 0, y\neq 0} g(y) = 0$. La fonction $g\circ f$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1/k\pi, k\in\mathbb{Z}^*\},\ \ g\circ f(x) = 0\ ; \qquad k\in\mathbb{Z}^*,\ \ g\circ f(1/k\pi) = 1.$$

La fonction $g\circ f$ ne possède pas de limite pour $x$ tendant vers 0, par valeurs différentes de 0 (procéder par l'absurde). C'est qu'ici $0\in f(A)$ alors que $0\notin B$.

Donnons une application du théorème 2.10.

**Théorème 2.11.** *Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $E$ et soit $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions numériques dont l'ensemble de définition contient $E$. On suppose que $\varphi$ (resp. $\psi$) possède une limite $l$ (resp. $l'$) pour $x$ tendant vers $a$, suivant $E$ et que de plus $l'$ est non nulle. Alors il existe un intervalle $J$ voisinage de $a$ tel que la fonction $\varphi/\psi$ soit définie sur $A\cap J$. Cette fonction tend vers $l/l'$, pour $x$ tendant vers $a$, suivant $E$.*

**Preuve**.- Divisons la preuve en trois étapes.
1. *Existence de $J$.* Posons $\varepsilon = |l'|$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in ]a-\eta, a+\eta[\cap E$ on ait $|\psi(x) - l'| < \varepsilon = |l'|$. D'où, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$x\in E\cap]a-\eta, a+\eta[,\quad l' - |l'| < \psi(x) < l' + |l'|\,.$$

Ainsi, la fonction $\psi$ ne s'annule pas et garde un signe constant sur $E\cap]a-\eta, a+\eta[$ : en particulier fonction $f/\psi$ est définie sur cet ensemble. On pose $J = ]a-\eta, a+\eta[$.
2. La fonction $1/\psi$, définie sur $E\cap J$, tend vers $1/l'$, pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$.
Nous supposerons, pour fixer les idées, $l' > 0$. La fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(y) = 1/y$ tend vers $1/l'$ pour $y$ tendant vers $l'$. Pour le vérifier, on écrit $1/y - 1/l' = (l'-y)/yl'$. La fonction $y\to yl'$ est bornée au voisinage de $l'\neq 0$ et le résultat découle du lemme 2.8. On applique alors le théorème 2.10 avec $f = \psi$, $A = E\cap J$, $g = 1/y$, $B = \mathbb{R}_+^*$, puisqu'en particulier $\varphi(E\cap J)\subset\mathbb{R}_+^*$.
3. Par application du théorème 2.7 (point 3.), la fonction $\varphi/\psi$ tend vers $l/l'$ pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A\cap J$.□

**Remarque**.- Attention : la preuve précédente n'est écrite que pour des fonctions à valeurs réelles. Le lecteur est invité à écrire une adaptation pour le cas des fonctions à valeurs complexes.

### 2.3.4. Limites et suites

**Théorème 2.12.** *Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $A$, $l$ un réel* (resp. *complexe) et $f$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes) dont l'ensemble de définition contient $A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*1. la fonction $f$ tend vers $l$, suivant $A$ ;*
*2. pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$ tendant vers $a$, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$.*

**Preuve**
[$1\Rightarrow 2$] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$ convergeant vers $a$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\forall x\in A)\quad (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\,.$$

Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$ relativement à $\eta$ il existe $n_0$ tel que

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad (n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \eta)\,.$$

On a alors pour tout $n > n_0$

$$|f(a_n) - l| < \varepsilon.$$

ce qui prouve la convergence vers $l$ de la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
[$2\Rightarrow 1$] On va montrer la contraposée : si la fonction $f$ ne tend pas vers $l$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$, qui converge vers $a$ et telle que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $l$.
Nous supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(\forall\eta > 0)\quad (\exists x\in A)\quad (|x-a| < \eta \text{ et } |f(x) - l| \geq \varepsilon)\,.$$

En particulier pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n$ appartenant à $A$ tel que

$$|x_n - a| < 1/(n+1) \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$ ainsi construite converge clairement vers $a$, alors que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $l$. □

### 2.4. Complément : cas ou $f$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

#### 2.4.1. Position du problème

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a$ un réel adhérent à $A$ et $f$ une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient $A$. La fonction $f$ possède une limite au point $a$ suivant $A$, si, et seulement si

$$(\exists l \in \mathbb{R}) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \eta > 0) \quad (\forall x \in A) \quad (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\,.$$

Donc, à l'inverse $f$ ne possède pas de limite au point $a$ suivant $A$ si, et seulement si

$$(\forall l \in \mathbb{R}) \quad (\exists \varepsilon > 0) \quad (\forall \eta > 0) \quad (\exists x \in A) \quad (|x-a| < \eta \text{ et } |f(x) - l| \geq \varepsilon)\,.$$

Cette situation arrive dans plusieurs cas, notamment celui où $f$ n'est pas bornée sur $A$ au voisinage de $a$, selon la proposition 2.2. Un cas particulier de cette situation est celle ou $f$ peut être rendue aussi grande que l'on veut dès lors qu'on prend $x$ assez voisin de $a$. C'est ce que l'on formalise ci-dessous.

#### 2.4.2. Définitions

**Définition 6.** *Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a$ un réel adhérent à $A$ et n'appartenant pas à $A$. Soit $f$ une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient $A$. On dit que $f$* tend vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) pour $x$ tendant vers $a$, $x$ suivant $A$, *si*

$$\begin{array}{c} (\forall \alpha > 0) \quad (\exists \eta > 0) \quad (\forall x \in A) \quad (|x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > \alpha) \\ \textit{(resp.} \quad (\forall \alpha > 0) \quad (\exists \eta > 0) \quad (\forall x \in A) \quad (|x-a| < \eta \Rightarrow f(x) < -\alpha)\ \textit{)} \end{array}. \tag{2.6}$$

Si $f$ tend vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$, on dit parfois aussi que $f$ admet $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) comme limite pour $x$ tendant vers $a$, $x$ suivant $A$, et l'on notera

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = +\infty \quad \textit{(resp.} \quad \lim_{x \to a, x \in A} f(x) = -\infty\,).$$

La proposition suivante précise les conséquences de l'existence d'une limite infinie (en un point de $\mathbb{R}$) sur la représentation graphique de $f$. Elle sera reprise dans la section consacrée à l'étude des branches infinies.

**Proposition 2.13.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie au voisinage d'un point $a$ sauf au point $a$. Si $f$ tend vers $+\infty$* (resp. $-\infty$) *pour $x$ tendant vers $a$, alors la courbe représentative de $f$ admet une asymptote verticale au point $a$ d'équation $x = a$.*

En effet, si $M_x$ désigne le point de coordonnées $(x, f(x))$ et $N_x$ le point de coordonnées $(a, f(x))$ la mesure algébrique $\overline{M_x N_x}$ tend vers 0 pour $x$ tendant vers $a$.

#### 2.4.3. Propriétés

**Théorèmes de comparaison**

**Proposition 2.14.** *Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $A$ n'appartenant pas à $A$, $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient $A$ et vérifiant*

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq g(x). \tag{2.7}$$

*On suppose que $f$ tend vers $+\infty$* (resp. *$g$ tend vers $-\infty$ ), pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$ alors $g$ tend vers $+\infty$* (resp. *$f$ tend vers $-\infty$ ), pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$.*

**Preuve**
1. Supposons que $f$ tende vers $+\infty$. Pour tout $\alpha > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\forall x \in A) \quad (|x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > \alpha)\,.$$

On a, *a fortiori*

$$(\forall x \in A) \quad (|x-a| < \eta \Rightarrow g(x) > \alpha)\,.$$

2. Le cas $f$ tendant vers $-\infty$ se résoud à l'aide du cas 1. appliqué à $-f$.□

**Propriétés algébriques** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $V$ un intervalle, voisinage de $a$. Considérons deux fonctions $f$ et $g$ à valeurs réelles, définies sur $V$ privé de $a$. Nous supposerons que $f$ et $g$ admettent des limites (finies) ou tendent vers soit $-\infty$ soit $+\infty$ en $a$. On notera lim un des quelconques symboles limites introduits. Avec ces conventions, on dispose des propositions suivantes pour les limites de $f+g$ et de $fg$. Les points d'interrogation symbolisent les cas indéterminés. Le lecteur préparera des exemples pour chacun de ces cas montrant que ‹‹ tout peut arriver ››.

**Avec la somme**

**Proposition 2.15.** *Avec les conventions précédentes, on dispose du tableau de cas suivant pour la limite de $f+g$ au point $a$ :*

| $\lim(f+g)$ | $\lim f = l$ | $\lim f = -\infty$ | $\lim f = +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lim g = l'$ | $l + l'$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim g = -\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ? |
| $\lim g = +\infty$ | $+\infty$ | ? | $+\infty$ |

**Avec le produit** On notera $\text{sgn}(x)$ le signe d'un réel $x$.

**Proposition 2.16.** *Avec les conventions précédentes, on dispose du tableau de cas suivants pour la limite de $fg$ au point $a$ :*

| $\lim(fg)$ | $\lim f = 0$ | $\lim f = l \neq 0$ | $\lim f = -\infty$ | $\lim f = +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim g = 0$ | 0 | 0 | ? | ? |
| $\lim g = l' \neq 0$ | 0 | $ll'$ | $-\text{sgn}(l')\infty$ | $\text{sgn}(l')\infty$ |
| $\lim g = -\infty$ | ? | $-\text{sgn}(l)\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim g = +\infty$ | ? | $\text{sgn}(l)\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Avec les quotients** Il suffit de remarquer que si $g$ est définie au voisinage de $a$, sauf éventuellement en $a$ et que si $g$ tend vers $-\infty$ soit $+\infty$ pour $x$ tendant vers $a$, la fonction $g$ ne s'annule pas sur un intervalle $J$ voisinage de $a$ et $1/g$ tend vers 0, pour $x$ tendant vers $a$.
Réciproquement, si $g$ **ne s'annule pas** sur un intervalle $J$ voisinage de $a$, sauf éventuellement au point $a$ (si elle est définie en ce point) et si $g$ tend vers 0, pour $x$ tendant vers $a$ **en gardant un signe constant** alors $1/g$ est définie sur $J$ et $1/g$ tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ selon le signe de $g$ sur $J$.
On applique alors les propriétés du tableau ci-dessus concernant les produits à $1/g$ et $f$. On obtient :

**Proposition 2.17.** *Avec les conventions précédentes, on dispose du tableau de cas suivants pour la limite de $f/g$ au point $a$ :*

| $\lim(f/g)$ | $\lim f = 0$ | $\lim f = l \neq 0$ | $\lim f = -\infty$ | $\lim f = +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim g = 0$ *g ne s'annule pas et garde un signe constant* | ? | $\text{sgn}(l)\,\text{sgn}(g)\infty$ | -$\text{sgn}(g)\infty$ | $\text{sgn}(g)\infty$ |
| $\lim g = l' \neq 0$ | 0 | $l/l'$ | $-\text{sgn}(l')\infty$ | $\text{sgn}(l')\infty$ |
| $\lim g = -\infty$ | 0 | 0 | ? | ? |
| $\lim g = +\infty$ | 0 | 0 | ? | ? |

**Limites et suites** Le théorème 2.12 possède un analogue dans le contexte des limites infinies.

**Théorème 2.18.** *Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $A$ et $f$ une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient $A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(1) la fonction $f$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), suivant $A$.*
*(2) pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$ tendant vers $a$, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

**Preuve**
[$1 \Rightarrow 2$] On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$ tendant vers $a$. Soit $\alpha > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que
$$(\forall x \in A) \quad (|x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > \alpha)\,.$$

Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$, relativement à $\eta$ il existe $n_0$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \eta)\,.$$

On a alors pour tout $n > n_0$

$$f(a_n) > \alpha.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = +\infty$.

[$2 \Rightarrow 1$] On va montrer la contraposée : si la fonction $f$ ne tend pas vers $+\infty$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$ qui tend vers $a$ et telle que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$.
Nous supposons donc qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(\forall \eta > 0) \quad (\exists x \in V) \quad (|x - a| < \eta \text{ et } f(x) \leq \alpha)\,.$$

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n$ appartenant à $V$ tel que

$$|x_n - a| < 1/\,(n+1) \quad \text{et} \quad f(x_n) \leq \alpha.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$ tend clairement vers $a$, alors que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$, car elle est bornée.□

## 3. NOTION DE LIMITE EN $+\infty$ OU EN $-\infty$

*Nous ne reprendrons pas systématiquement les démonstrations dans ce paragraphe, puisqu'elles sont conceptuellement voisines de celles du paragraphe précédent. Il s'agit d'un excellent exercice sur le maniement des raisonnements en ‹‹ pour tout ... il existe ›› que de les écrire.*

### 3.1. Limite finie : définition et premières conséquences

Nous dirons qu'une partie $V$ de $\mathbb{R}$ est *voisinage* de $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) s'il existe un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (*resp.* $]-\infty, a[$) inclus dans $V$.

On considère dans la suite un voisinage $V$ de $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) et $f$ une fonction à valeurs réelles (*resp.* complexes) dont l'ensemble de définition contient $V$.

**Définition 7.** ($i$) *On dit qu'un réel (*resp. *complexe) $l$ est* limite de $f$ pour $x$ tendant vers $+\infty$ *ou* que $f$ tend vers $l$ pour $x$ tendant vers $+\infty$ *(resp. $-\infty$) si l'on a*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \beta \in V) \quad (\forall x \in V) \quad (x > \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon). \tag{3.1}$$

($ii$.) *On dit qu'un réel (*resp. *complexe) $l$ est* limite de $f$ pour $x$ tendant vers $-\infty$ *ou* que $f$ tend vers $l$ pour $x$ tendant vers $-\infty$ *si l'on a*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \beta \in V) \quad (\forall x \in V) \quad (x < \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon). \tag{3.2}$$

Comme dans le cas des limites en un point $a$ de $\mathbb{R}$, on dispose d'un résultat d'unicité.

**Proposition 3.1.** *Supposons qu'il existe deux réels (*resp. *complexes) $l$ et $l'$ limites de $f$ pour $x$ tendant vers $+\infty$. Alors $l = l'$.*

La démonstration analogue à celle de la proposition 5 est laissée au lecteur qui énoncera un résultat comparable pour les limites en $-\infty$. Il existe donc au plus un réel $l$ rendant vrai la propriété (3.1) ou la propriété (3.2). Lorsqu'il existe, ce réel $l$ sera appelé la *limite* de $f$ pour $x$ tendant vers $+\infty$ (*resp.* pour $x$ tendant vers $-\infty$) et noté

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ ou bien } \lim\nolimits_{x\to+\infty} f(x) \;\; (\textit{resp.} \lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ ou bien } \lim\nolimits_{x\to-\infty} f(x)).$$

**Remarques.-** L'existence d'une limite en $+\infty$ (*resp.* en $-\infty$) et les propriétés liées à cette existence sont locales en ce sens qu'elles sont liées au comportement de $f$ au voisinage de $+\infty$ (ou bien en $-\infty$), comme le montre les propositions suivantes écrites dans le cas de limites en $+\infty$.

**Proposition 3.2.** *Soit $W$ un intervalle voisinage de $+\infty$ inclus dans $V$ et $l$ un nombre réel* (resp. *complexe). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la fonction $f$ tend vers $l$ pour $x$ tendant vers $+\infty$ ;*
(2) *la restriction de la fonction $f$ à $W$ tend vers $l$ pour $x$ tendant vers $+\infty$.*

**Proposition 3.3.** *Si $f$ possède une limite pour $x$ tendant vers $+\infty$, la fonction $f$ est bornée au voisinage de $+\infty$ : il existe un intervalle $W$ voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) et un réel $M > 0$ tels que*

$$\forall x \in W, \quad |f(x)| < M.$$

Les **preuves** de ces propositions sont analogues à celles des propositions 2.1 et 2.2.

Donnons un exemple classique de situation où $f$ admet une limite finie en $+\infty$, qui constitue dans un cas particulier, un résultat à rapprocher de la proposition 3.3.

**Exemple 1.** *Soit $f$ définie sur un voisinage de $+\infty$. Si $f$ est monotone et bornée sur $V$ alors $f$ admet une limite en $+\infty$.*

En effet, si $f$ est par exemple croissante et majorée, on pose $l = \sup_{x \in V} f(x)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0$ tel que

$$l - \varepsilon < f(x_0) \leq l.$$

Comme $f$ est croissante et majorée par $l$, il vient

$$\forall x > x_0, \quad l - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq l.$$

D'où la propriété 3.1 avec $\alpha = x_0$.□

Enoncons enfin une conséquence sur la courbe représentative de la fonction $f$ lorsque celle-ci est à valeurs réelles. Cette proposition sera reprise dans la section consacrée à l'étude des branches infinies.

**Proposition 3.4.** *Soit $f$ une fonction définie sur $V$ à valeurs réelles. Si $f$ possède une limite $l$ pour $x$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) la courbe représentative de $f$ possède la droite d'équation $y = l$ comme asymptote horizontale pour $x$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

En effet, si on désigne par $M_x$ le point de coordonnées $(x, f(x)$ et $N_x$ le point de coordonnées $(x, l)$ la mesure algébrique $\overline{M_x N_x}$ tend vers 0 pour $x$ tendant vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$).

### 3.2. Propriétés des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$

#### 3.2.1. Théorème de comparaison

*De nouveau les propriétés de ce paragraphe sont spécifiques aux fonctions à valeurs réelles :* on dispose d'un analogue du théorème des Gendarmes. Nous l'énoncons dans le cas d'une limite en $+\infty$. On laisse la preuve au soin du lecteur.

**Théorème 3.5.** *Soit $f$, $g$ et $h$ trois fonctions à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient un intervalle $V$ voisinage de $+\infty$ et vérifiant*

$$\forall x \in V, \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x). \tag{3.3}$$

*On suppose que $f$ et $g$ tendent vers la même limite vers $l$ pour $x$ tendant vers $+\infty$. Alors $h$ tend vers $l$ pour $x$ tendant vers $+\infty$.*

#### 3.2.2. Propriétés algébriques

Soit $V$ une partie de $\mathbb{R}$, voisinage de $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) et soit $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles ou complexes dont l'ensemble de définition contient $V$.

**Théorème 3.6.** *On suppose que $f$ et $g$ possèdent chacune une limite pour $x$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et l'on note*

$$l = \lim_{x\to+\infty} f(x) \;\; l' = \lim_{x\to+\infty} g(x) \qquad (\textit{resp.}\; l = \lim_{x\to-\infty} f(x) \;\; l' = \lim_{x\to-\infty} g(x)\,).$$

*Alors :*
(1) *la fonction $f+g$ tend vers $l+l'$ pour $x$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ;*
(2) *pour tout scalaire $\lambda$, la fonction $f$ tend vers $\lambda l$ pour $x$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ;*
(3) *la fonction $fg$ admet $ll'$ comme limite pour $x$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ;*
(4) *Si de plus $l'$ est non nulle il existe un intervalle $W$ voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) sur lequel la fonction $g$ ne s'annule pas et garde un signe constant et la fonction $f/g$ définie sur $W$ admet $l/l'$ comme limite pour $x$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

La **preuve**, analogue à celle du théorème 2.7 est laissée au lecteur. Le point 4 peut se voir comme un corollaire d'un théorème de composition.

### 3.2.3. Théorème de composition des limites

Nous énoncons un exemple de résultat.

**Théorème 3.7.** *Soit $V$ une partie de $\mathbb{R}$, voisinage de $+\infty$ et $f$ une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient $V$. Soit $B$ une partie de $\mathbb{R}$, $b$ un réel adhérent à $B$, $l$ un réel* (resp. *complexe) et $g$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes) dont l'ensemble de définition contient $B$. On suppose de plus que $f(V) \subset B$ de sorte que $g \circ f$ soit définie sur $V$.*
*Si $f$ admet $b$ comme limite en $+\infty$ et $g$ admet $l$ comme limite en $b$ suivant $B$, alors $g \circ f$ admet $l$ comme limite en $+\infty$.*

**Preuve.-** Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$(\forall y \in B) \;\; (|y-b| < \delta \Rightarrow |g(y) - l| < \varepsilon)\,.$$

Relativement à $\delta$, il existe $\beta \in W$ tel que

$$(\forall x \in W) \;\; (x > \beta \Rightarrow |f(x) - b| < \delta)\,.$$

Comme $f(V) \subset B$, il vient (en faisant ‹‹ jouer à $f(x)$ le rôle de $y$ ››)

$$(\forall x \in V) \;\; (x > \beta \Rightarrow |g(f(x)) - l| < \varepsilon)\,.$$

D'où le résultat.□

### 3.2.4. Limites et suites

On énonce le théorème dans le cas d'une fonction $f$ définie au voisinage de $+\infty$.

**Théorème 3.8.** *Soit $V$ un voisinage de $+\infty$, $f$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes) dont l'ensemble de définition contient $V$, $l$ un réel* (resp. *complexe). Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la fonction $f$ tend vers $l$ .*
(2) *pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $V$ tendant vers $+\infty$, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l$.*

**Preuve**
[$1 \Rightarrow 2$] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $V$ tendant vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\beta \in V$ tel que

$$(\forall x \in V) \quad (x > \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\,.$$

Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $n_0$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n > n_0 \Rightarrow a_n > \beta)\,.$$

On a alors pour tout $n > n_0$

$$f(a_n) > \beta.$$

ce qui prouve que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

[$2 \Rightarrow 1$] On va montrer la contraposée : si la fonction $f$ ne tend pas vers $l$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $V$ qui tend vers $+\infty$ et telle que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $l$.
Nous supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(\forall \beta \in V) \quad (\exists x \in V) \quad (x > \beta \text{ et } |f(x) - l| \geq \varepsilon).$$

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n$ appartenant à $V$ tel que

$$x_n > n \text{ et } \quad |f(x_n) - l| \geq \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $V$ tend clairement vers $+\infty$, alors que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $l$.□

### 3.3. Cas ou $f$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ : définitions, exemples

*La suite du chapitre concerne des fonctions à valeurs réelles.*

**Définitions 8.** - *1. Soit $V$ une partie de $\mathbb{R}$ voisinage de $+\infty$ et $f$ une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient V. On dit que f* tend vers $+\infty$ *(resp. $-\infty$)* pour $x$ tendant vers $+\infty$ *ou que $f$* admet $+\infty$ *(resp. $-\infty$) comme limite en $+\infty$ si*

$$\begin{aligned} &(\forall \alpha > 0) \quad (\exists \beta \in V) \quad (\forall x \in V) \quad (x > \beta \Rightarrow f(x) > \alpha) \\ &\textit{(resp. } (\forall \alpha > 0) \quad (\exists \beta \in V) \quad (\forall x \in V) \quad (x > \beta \Rightarrow f(x) < -\alpha)\ ). \end{aligned} \tag{3.4}$$

*On notera alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *(resp.* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *).*

*2. Soit V une partie de $\mathbb{R}$ voisinage de $-\infty$ et $f$ une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient V. On dit que $f$* tend vers $+\infty$ *(resp. $-\infty$)* pour $x$ tendant vers $-\infty$ *si*

$$\begin{aligned} &(\forall \alpha > 0) \quad (\exists \beta \in V) \quad (\forall x \in V) \quad (x < \beta \Rightarrow f(x) > \alpha) \\ &\textit{(resp. } (\forall \alpha > 0) \quad \exists (\beta \in V) \quad (\forall x \in V) \quad (x < \beta \Rightarrow f(x) < -\alpha)\,). \end{aligned} \tag{3.5}$$

*On notera alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *(resp.* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *).*

Comme première conséquence des définitions donnons la proposition suivante.

**Proposition 3.9.** *Soit $V$ une partie de $\mathbb{R}$ voisinage de $+\infty$ et $f$ une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient $V$ et admettant $+\infty$* (resp. $-\infty$) *comme limite en $+\infty$. Alors :*
*(i) la fonction $f$ n'est pas bornée ;*
*(ii.) il existe un intervalle $I$ voisinage de $+\infty$* (resp. $-\infty$) *sur lequel $f$ est strictement positive.*

Les **preuves** sont des exercices simples.

Voici un cas particulier dans lesquel $f$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ :

**Exemple 2.** *Soit $f$ définie sur un voisinage $V$ de $+\infty$ et non **bornée** : si $f$ est croissante (resp. décroissante) alors $f$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

En effet, supposons $f$ croissante. Comme $f$ est non bornée, donc non majorée, on a

$$(\forall \alpha > 0) \quad (\exists x_0 \in V) \quad (f(x_0) > \alpha).$$

Comme $f$ est croissante, on a : $(\forall x \in V) \quad (x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0))$. D'où la propriété

$$(\forall \alpha > 0) \quad (\exists x_0 \in V) \quad (\forall x \in V) \quad (x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) > \alpha).$$

### 3.4. Propriétés des limites infinies (en $\pm\infty$)

#### 3.4.1. Théorème de comparaison

**Théorème 3.10.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient un intervalle $V$, voisinage de $+\infty$ et vérifiant*

$$\forall x \in V, \quad f(x) \leq g(x). \tag{3.6}$$

*On suppose que $f$ tend vers $+\infty$ (resp. $g$ tend vers $-\infty$ ), pour $x$ tendant vers $+\infty$ alors $g$ tend vers $+\infty$ (resp. $f$ tend vers $-\infty$ ), pour $x$ tendant vers $+\infty$.*

**Preuve.-** Supposons que $f$ tende vers $+\infty$. Pour tout $\alpha > 0$ il existe $\beta \in V$ tel que

$$(\forall x \in V) \quad (x > \beta \Rightarrow f(x) > \alpha)\,.$$

*A fortiori*, pour tout $x \in V$, on a : $(x > \beta \Rightarrow g(x) > \alpha)$.
Le cas de $f$ tendant vers $-\infty$ se régle à l'aide du cas précédent appliqué à $-f$.□

#### 3.4.2. Propriétés algébriques

On généralise sans problème les tableaux des propositions 2.15 et 2.16 au cas présent.

#### 3.4.3. Théorèmes de composition de limites

On laisse au lecteur le soin d'énoncer et d'établir des théorèmes de composition de limites qui complétent les théorèmes 2.10 et 3.7. En voici un exemple.

**Théorème 3.11.** *Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un réel adhérent à $A$ et $f$ une fonction à valeurs réelles tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), au point $a$ suivant $A$. Soit $W$ une partie de $\mathbb{R}$, voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $g$ une fonction à valeurs réelles définie sur $W$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$). On suppose $f(A)$ inclus dans $W$. La fonction $g \circ f$ tend vers $+\infty$ pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$.*

#### 3.4.4. Limites et suites

Le lecteur s'inspirera des énoncés et preuves des théorèmes 2.18 et 3.8 pour établir le :

**Théorème 3.12.** *Soit $V$ un voisinage de $+\infty$, $f$ une fonction à valeurs réelles* (resp. *complexes) dont l'ensemble de définition contient $V$, Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la fonction $f$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ .*
(2) *pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $V$ tendant vers $+\infty$, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

## 4. Etude des branches infinies

### 4.1. Position du problème. Premières définitions

On suppose donnée une fonction $f$ sur un ensemble $E = \mathrm{def}(f) \to \mathbb{R}$ dont on note $\Gamma$ le graphe, *id est*

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathrm{def}(f) \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}\,.$$

Pour tout $x \in \mathrm{def}(f)$, on notera $M_x := M_x(\Gamma)$ (s'il y a risque de confusion sur la courbe considérée) le point de $\Gamma$ de coordonnées $(x, f(x))$.

Il s'agit de préciser l'allure du graphe de $f$ lorsque le graphe de $f$ n'est pas un ensemble borné, ce qui revient à dire que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_x}$ n'est pas bornée lorsque $x$ parcourt $\mathrm{def}(f)$.
Ceci peut arriver dans deux situations :

- il existe $a \in \mathbb{R}$ (adhérent à $\mathrm{def}(f)$) tel que $f(x)$ ne soit pas bornée au voisinage de $a$ (dans un sens qui sera précisé),
- l'ensemble $\mathrm{def}(f)$ contient un voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

On va formaliser ces deux types de situations ci-dessous.

**Définition 9.** *On dit que* $\Gamma$ *possède* une branche infinie en $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *dans l'une ou l'autre des situations suivantes :*
*(i) soit* $a \in \mathbb{R}$ *et il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $I_a = ]a - \varepsilon, a[$ *ou* $I_a = ]a, a + \varepsilon[$ *est inclus dans* $\mathrm{def}(f)$ *et, de plus, pour tout intervalle* $J$ *voisinage de* $a$, $f_{|I \cap \mathrm{def}(f)}$ *n'est pas bornée.*
*(ii) soit* $a \in \{-\infty, +\infty\}$ *et il existe un voisinage* $I_a$ *de* $a$ *inclus dans* $\mathrm{def}(f)$.

**Exemple 3.** *Dans le cas ou* $a \in \mathbb{R}$, *un cas particulier de branche infinie est celui* $f$ *tend vers* $+\infty$ *ou vers* $-\infty$ *pour* $x$ *tendant vers* $a$ *suivant* $I_a = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \setminus \{a\}$ (resp. $]a - \varepsilon, a[, ]a, a + \varepsilon[$). *On a alors*

$$\lim_{x \to a, x \in A} d(M_x, N(a, f(x)) = \lim_{x \to a, x \in A} |x - a| = 0.$$

*La droite d'équation* $x = a$ *est dite* asymptote *à la courbe* $\Gamma$.

La situation décrite dans l'exemple précédent peut se généraliser à une courbe quelconque. Compte tenu de la difficulté d'une définition générale de la notion de distance entre deux courbes (qui dépasse le cadre du concours), on formalise l'idée de courbes ‹‹ semblant se confondre à l'infini ›› par la définition suivante :

**Définition 10.** *Soit* $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *tel que la courbe* $\Gamma$ *possède une branche infinie en* $a$. *Soit* $I_a$ *comme dans la définition 9. On dit qu'une courbe* $C$ *est asymptote à la courbe* $\Gamma$ *si, à tout point* $M_x$ *de* $\Gamma$, $x \in I_a$, *on peut associer un point* $N_{M_x}$ *de* $C$ *tel que*

$$\lim_{x \to a, x \in I_a} d(M_x, N_{M_x}) = 0$$

**4.2. Le cas de** $a \in \mathbb{R}$

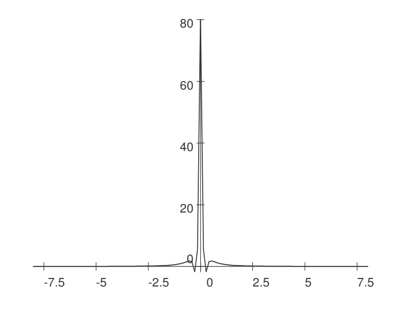
L'exemple donné ci dessus montre la proposition suivante :

**Proposition 4.1.** *Soit* $f$ *une fonction à valeurs réelles définie au voisinage d'un point* $a$ *sauf au point* $a$. *Si* $f$ *tend vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$) *pour* $x$ *tendant vers* $a$, *alors la courbe représentative de* $f$ *admet une asymptote verticale au point* $a$ *d'équation* $x = a$.

En effet, si $M_x$ désigne le point de coordonnées $(x, f(x))$ et $N_x$ le point de coordonnées $N_{M_x}(a, f(x))$ la distance $d\,(M_x N_{M_x})$ tend vers 0 pour $x$ tendant vers $a$.

Cependant la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 4.** *On considère* $a = 0$ *et* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto (1/x)\sin(1/x)$. *La droite d'équation* $x = 0$ *est asymptote au graphe de* $f$. *Pourtant* $f$ *n'admet ni limite finie ni ne tend vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *en* 0.




Graphe de la fonction $x \to \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$

**4.3. Etude au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$**

*On considère dans toute la suite une fonction $f$ dont l'ensemble de définition contient un voisinage $V$ de $+\infty$.*

On étudie les propriétés du graphe de $f$ au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire de la *branche infinie* en $+\infty$ du graphe de $f$. Ceci revient à étudier tout arc $\gamma$ du graphe de $f$ défini par

$$\gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in W\}, \qquad W \text{ voisinage de } +\infty \text{ inclus dans } V.$$

On considère fixé un tel arc.

**4.3.1. Cas ou $f$ est bornée au voisinage de $+\infty$**

**Cas particulier : $f$ possède une limite finie** Posons $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Pour tout $x \in V$ on considère les points $M_x\,(x, f(x))$ et $N_x(x, l)$. On a

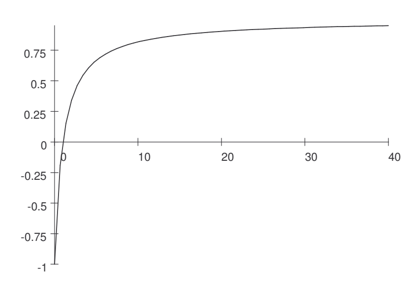
$$\lim_{x\to+\infty} d\,(M_x, N_x) = 0,$$

puisque $d\,(M_x, N_x) = |f(x) - l|$. Ainsi :

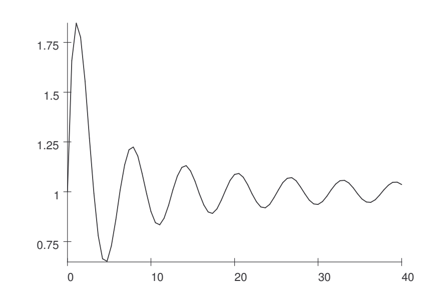
**Proposition 4.2.** *La droite d'équation $y = l$ est* asymptote *au graphe de $f$.*

**Remarque.**- L'étude, lorsqu'elle est possible de la fonction $x \to f(x) - l$ permet de préciser la position du graphe de $f$ par rapport à l'asymptote.

**Exemples 5.** [1]
*(i) si $f$ est monotone sur $V$, alors $\gamma$ est au dessus de l'asymptote si $f$ est décroissante, au dessous, sinon. C'est le cas pour la fonction $f_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \frac{2}{|x|+1}$.*
*(ii) Si $f$ n'est pas monotone, tout peut arriver. Pour la fonction $f_2 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 + \frac{2}{|x|+1}\sin(x)$, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote au graphe. Le graphe oscille avec une amplitude tendant vers 0 autour de cette droite.*




Graphe de $f_1 : x \to 1 - \frac{2}{|x|+1}$

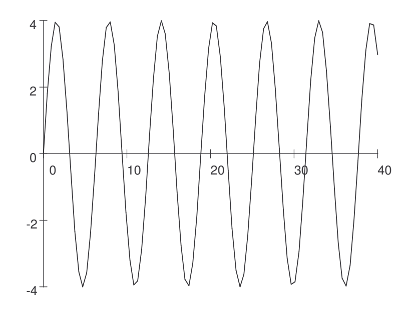



Graphe de $f_2 : x \to 1 + \frac{2(\sin x)}{|x|+1}$

**Cas ou $f$ ne possède pas de limite** Comme $f$ est bornée au voisinage de $+\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$. On peut dire alors que la droite d'équation $y = 0$ est une *direction asymptotique* pour le graphe de $f$.

**Exemple 6.** *La fonction $f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4\sin(x)$ est bornée et ne possède pas de limite en $+\infty$. C'est le cas de toute fonction périodique non constante.*

[1] Tous les exemples seront étudiés au voisinage de $+\infty$.




Graphe de $f_3 : x \rightarrow 4 \sin x$

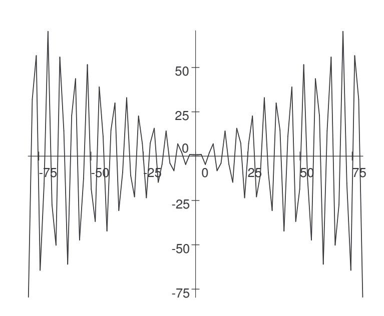
#### 4.3.2. Cas ou la fonction $f$ n'est pas bornée

Les situations les plus diverses peuvent se produire :

- la fonction $f$ peut ne pas tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ ;
- cas particulier: on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

C'est ce dernier cas qui fait l'objet du paragraphe suivant.

**Exemple 7.** *La fonction* $f_4 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x\sin(x)$ *n'est pas bornée et ne tend ni vers* $+\infty$ *ni vers* $-\infty$.




Graphe de $f_4 : x \rightarrow x \sin x$

#### 4.3.3. Le cas particulier où $f$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

On peut (parfois) préciser davantage la nature de la branche infinie en étudiant le rapport $f(x)/x$. Posons $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \delta\infty$ avec $\delta = 1$ ou $\delta = -1$.

**Proposition-Définition 11.** *On dit que le graphe de $f$ possède une* direction asymptotique *si l'une des conditions suivantes équivalentes est vérifiée :*
*$(i)$ la pente de la droite $D_x = (OM_x)$ possède une limite finie ou tend vers $\delta\infty$ pour $x$ tendant vers $+\infty$ ;*
*$(ii)$ le rapport $f(x)/x$ tend vers une limite finie ou tend vers $\delta\infty$.*

L'équivalence est claire puisque la pente de la droite $(OM_x)$ s'écrit

$$p_x = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(0)}{x}, \text{ avec } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(0)}{x} = 0.$$

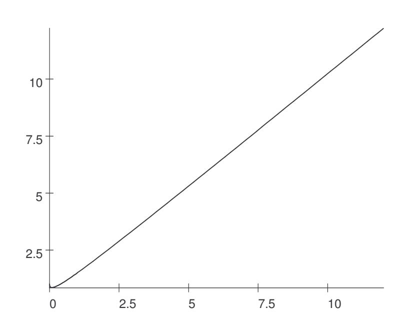
**Cas ou $f(x)/x$ possède une limite finie en $+\infty$** Posons $b = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x$.
On étudie alors la quantité $g(x) = f(x) - bx$ définie sur $V$.

**Proposition-Définition 12.**
*(i) Si $g : x \mapsto f(x) - bx$ possède une limite $c$, en $+\infty$ la droite d'équation $y = bx + c$ est asymptote au graphe de $f$.*
*(ii) Si $g : x \mapsto f(x) - bx$ tend vers $+\infty$ ou bien vers $-\infty$ en $+\infty$ on dit que le graphe de $f$ possède une* branche parabolique dans la direction $y = bx$.

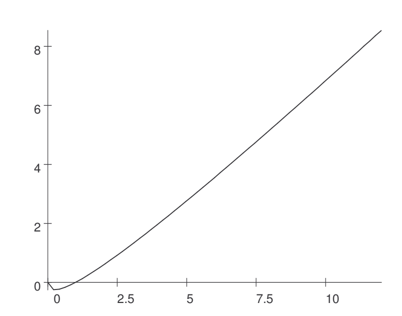
**Preuve.**- En effet, dans le cas $i.$, en notant $N_x(x, bx + c)$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} d(M_x, N_x) = |g(x) - c| = 0.\square$$

**Exemples 8.**
*(i) La fonction $f_5 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ possède la droite d'équation $y = x$ comme asymptote en $+\infty$.*
*(ii) La fonction $f_6 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \sqrt{x}$, possède une branche parabolique dans la direction $y = x$.*




Graphe de $f_5 : x \to x + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$



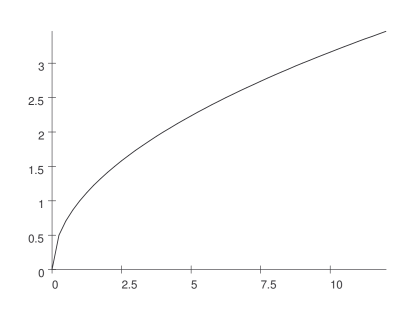

Graphe de $f_6 : x \to x - \sqrt{x}$

**Remarques**.
$(i)$ Si en particulier $b = 0$ on a

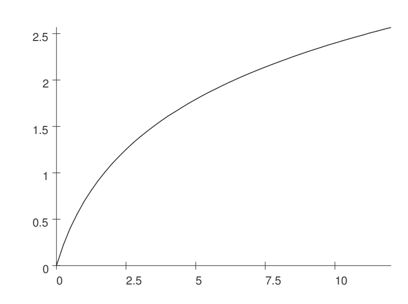
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \delta\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0.$$

Le graphe de $f$ possède une branche parabolique dans la direction $y = 0$. On dit aussi que le graphe de $f$ possède une *branche parabolique dans la direction $Ox$.*
$(ii)$ Le vocabulaire vient de la considération des exemples classiques. Ainsi, le graphe de la fonction $f_7 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$, paramétrage d'un arc de la parabole d'équation $y^2 - x = 0$, admet au sens de la proposition-définition 12 une *branche parabolique dans la direction $Ox$.*

**Exemples 9.**
*(i) Comme indiqué ci-dessus, la fonction $f_7 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ une branche parabolique dans la direction $Ox$.*
*(ii) La fonction $f_8 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x + 1)$ possède une branche parabolique dans la direction $Ox$.*



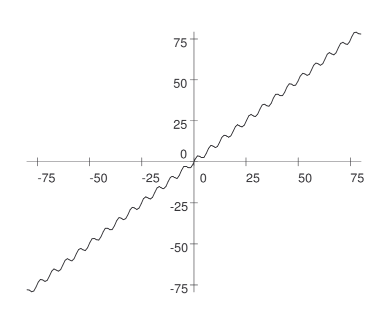

Graphe de la fonction $f_7 : x \to \sqrt{x}$



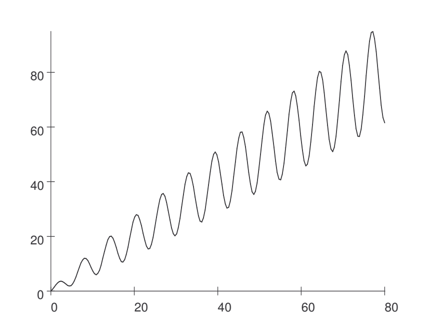

Graphe de $f_8 : x \to \ln(x + 1)$

Dans les cas non couverts par la proposition 12, la droite $y = bx$ est une simple direction asymptotique.

**Exemples 10.** *Les fonctions suivantes montrent des comportements possibles :*
*(i)* $f_9 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 2\sin x$
*Le graphe de $f$ oscille, avec une amplitude bornée autour de la droite d'équation $y = x$.*
*(ii)* $f_{10} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 2x^{2/3}\sin x$.
*Le graphe de $f$ oscille, avec une amplitude non bornée autour de la droite d'équation $y = x$.*




Graphe de $f_9 : x \to x + 2\sin x$



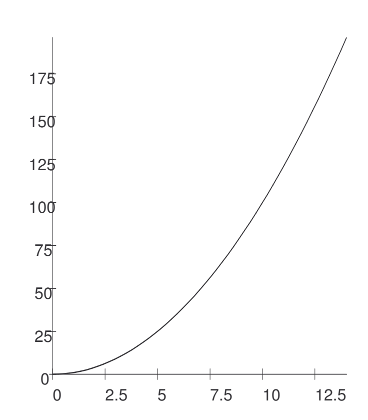

Graphe de $f_{10} : x + x^{2/3}\sin(x)$

**Cas ou $f(x)/x$ possède une limite infinie en $+\infty$**

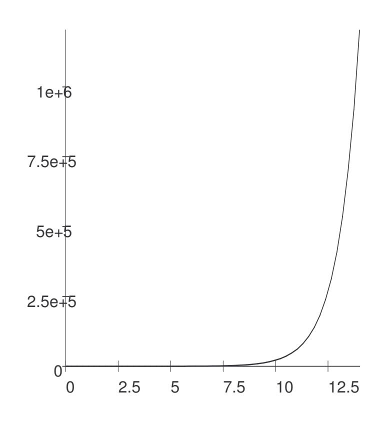
**Définition 13.** *On suppose que* $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$ *ou bien que* $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$. *On dit alors que le graphe de $f$ possède une* branche parabolique dans la direction *$Oy$.*

Le vocabulaire de la définition 13 vient encore de considérations géométriques, comme le montre l'exemple *i.* ci-dessous.

**Exemples 11.**
*(i) Le graphe de la fonction* $f_{11} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ *admet une branche parabolique dans la direction $Oy$ : $f$ est un paramétrage d'un arc de la parabole d'équation $y - x^2 = 0$.*
*(ii) Le graphe de la fonction* $f_{12} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp x$ *admet une branche parabolique dans la direction $Oy$.*




Graphe de $f_{11} : x \to x^2$




Graphe de $f_{12} : x \to \exp x$



**PLC1-Mathématiques**
**Auteur : A. Delcroix**

# CONTINUITE EN UN POINT
# FONCTIONS CONTINUES

## 1. Introduction

Nous placons ce document dans la lignée de celui consacré aux limites, en particulier pour le niveau de l'exposé. Dans la section 2, les démonstrations des propriétés qui découlent quasi immédiatement de résultats sur les limites ne seront en général pas reprises.

Dans le cas où ce document est utilisé comme support pour une préparation à la première épreuve orale du CAPES, ceci ne veut pas dire que le candidat au CAPES peut ‹‹ tout mettre en pré-requis ›› puisqu'il s'expose à ce qu'on lui demande la démonstration des propriétés les plus significatives.

C'est de toute façon un bon exercice que de lire ce document crayon en main et de refaire les démonstrations dans le cadre présent, souvent plus simple !

La section 3 est consacrée aux principales propriétés des fonctions continues de la variable réelle, dont le théorème des valeurs intermédiaires. Enfin la section 4 s'intéresse à l'association de deux propriétés des fonctions de la variable réelle - la monotonie et la continuité - conduisant ainsi aux caractérisations des homéomomorhpismes définis sur un intervalle réel.

## 2. Continuité en un point

### 2.1. Définition et première conséquence

Soit $I$ un intervalle réel, voisinage d'un point $a$ et $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes dont l'ensemble de définition contient $I$.

**Définition 1.** *On dit que $f$ est continue au point $a$ si $f$ possède une limite pour $x$ tendant vers $a$ et si cette limite est égale à $f(a)$, i.e.*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \eta > 0) \quad (\forall x \in I) \qquad (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,. \tag{2.1}$$

**Remarques.**
1. Selon la définition adoptée dans le document consacré aux limites, si $f$ admet une limite pour $x$ tendant vers $a$ sans précision d'ensemble suivant lequel cette limite est prise, cette limite est nécessairement $f(a)$ : si nous précisons ici c'est pour éviter toute ambiguïté par rapport à d'autres conventions. Remarquons que $f$ est continue au point $a$ si, et seulement si, $f$ possède une limite pour $x$ tendant vers $a$, $x$ différent de $a$ et que cette limite est $f(a)$.
2. Comme la notion de limite, la notion de continuité en un point est locale. Une fonction $f$ est continue en un point $a$ si, et seulement si, sa restriction à tout intervalle voisinage de $a$ est continue en $a$.

Citons deux conséquences souvent utilisées de la continuité en un point. La fonction $f$ à valeurs réelles ou complexes est supposée définie sur $I$.

**Proposition 2.1.** *Si la fonction $f$ est continue au point $a$, alors $f$ est localement bornée au voisinage de $a$ : il existe un intervalle $J$, inclus dans $I$, voisinage de $a$ et un réel $M > 0$ tel que*

$$\forall x \in I \cap J, \quad |f(x)| < M.$$

**Preuve.**- C'est un corollaire immédiat de la proposition correspondante du chapitre consacré aux limites : on écrit la propriété 2.1 pour $\varepsilon = 1$ et on utilise l'inégalité triangulaire.□

**Proposition 2.2.** *Si la fonction $f$ est continue au point $a$ et si $f(a)$ est non nul alors il existe un intervalle $J$ voisinage de $a$ sur lequel $f$ ne s'annule pas.*

**Preuve.-** Pour $\varepsilon = |f(a)|$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap ]a-\eta, a+\eta[, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon = |f(a)|\,. \tag{2.2}$$

Ce qui entraine (grâce à $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$)

$$\forall x \in I \cap ]a-\eta, a+\eta[, \quad 0 < |f(x)|\,.$$

D'où le résultat, en posant $J = ]a-\eta, a+\eta[$.□

**Remarque 1.** *Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, la fonction garde le signe de $f(a)$ sur l'intervalle $J$.*

En effet, l'inégalité 2.2 entraine

$$\forall x \in I \cap ]a-\eta, a+\eta[, \quad f(x) \in \left]f(a) - |f(a)|\,, f(a) + |f(a)|\right[,$$

ce dernier intervalle ne contenant pas 0.

On dispose de la proposition suivante, plus forte (On pourra par exemple démontrer seulement cette dernière dans un oral) :

**Proposition 2.3.** *Si la fonction $f$ est continue au point $a$ et si $f(a)$ est non nul, il existe un intervalle $J'$ voisinage de $a$ et un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall x \in J', \quad |f(x)| \geq \alpha.$$

**Preuve.-** On reprend la démonstration de la proposition 2.1 avec, par exemple, $\varepsilon = |f(a)|/2$.□

**Remarque 2.** *Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, si $f(a) > 0$ (*resp. *$f(a) < 0$), il existe un voisinage $J'$ de $a$ et une constante $\beta > 0$ tels que $\forall x \in J'$, $f(x) > \beta$ (*resp. *$f(x) < -\beta$).*

En effet, la propriété 2.1 entraine l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap ]a-\eta', a+\eta'[, \quad f(x) \in \left]f(a) - |f(a)|/2, f(a) + |f(a)|/2\right[.$$

On vérifie alors que $\beta = |f(a)|/2$ convient.□

**Remarque 3.** *Il est bon, pour illustrer la définition de la continuité, de savoir étudier ‹‹à la main››, c'est-à-dire sans utiliser de théorèmes généraux (dont ceux énoncés plus loin) la continuité de quelques fonctions simples.*

**Exemples 1.** *Les fonctions* id : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ *sont continues en tout point de $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}_*^+$.*

Pour les deux premiers exemples, on peut appliquer directement la définition. Pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, on étudie la continuité au point $x_0 > 0$ en écrivant pour tout $x > 0$

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}}.$$

On a alors clairement $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Il est bon de savoir écrire la négation de la propriété ‹‹$f$ est continue en $a$››, soit

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad (\forall \eta > 0) \quad (\exists x \in I) \qquad (|x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)\,.$$

Il est également bon de disposer d'exemples de fonction non continues en un point (non triviaux) et de savoir le démontrer. On en trouve ci-dessous.

**Exemples 2.**
*i. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ caractéristique des rationnels définie par*

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \quad f(x) = 0$$

*est continue en aucun point.*
*ii. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \quad f(x) = 0$$

*est continue en zéro, non continue en tout autre point.*

### 2.2. Continuité à gauche, à droite

On rappelle qu'un ensemble $A$ est voisinage à gauche (*resp.* à droite) d'un point $a$ s'il existe $\delta > 0$ tel que l'intervalle $]a-\delta, a]$ (*resp.* $]a-\delta, a]$) soit inclus dans $A$.

**Définition 2.** *Soit $I$ un intervalle, voisinage à gauche* (resp. *à droite*) *d'un point $a$ réel et $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes dont l'ensemble de définition contient $I$. Si $f$ possède une limite à gauche en $a$* (resp. *à droite*) *égale à $f(a)$, on dit que $f$ est continue à gauche* (resp. *continue à droite*) *en $a$.*

**Exemple 3.** *La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue à droite en zéro. (On utilise directement les définitions.)*

Avec les notations de la définition 2, $f$ est continue à gauche en $a$ si, et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \eta > 0) \quad (\forall x \in I) \quad (a - \eta < x \leq a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,. \tag{2.3}$$

Le lecteur écrira la proposition quantifiée relative à la continuité à droite.

On dispose du théorème suivant, corollaire du théorème analogue du chapitre consacré aux limites.

**Théorème 2.4.** *Soit $a \in \mathbb{R}$, $I$ un intervalle voisinage de $a$ et $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*1. $f$ est continue en $a$ ;*
*2. $f$ est continue à gauche et continue à droite en $a$.*

### 2.3. Propriétés

#### 2.3.1. Théorème de prolongement par continuité

**Théorème 2.5.** *Soit $I$ un intervalle voisinage (resp. voisinage à gauche, à droite) d'un point $a$ et $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sue $I \backslash \{a\}$. On suppose que $f$ possède une limite $l$* (resp. *limite à gauche, limite à droite) en $a$. Alors, l'application $\widetilde{f}$ définie sur $I$ par*

$$\forall x \in I \backslash \{a\}, \quad \widetilde{f}(x) = f(x) \quad \widetilde{f}(a) = l.$$

*est continue* (resp. *continue à gauche, continue à droite*) *au point $a$.*

Le théorème résulte immédiatement des définitions. L'application $\widetilde{f}$ s'appelle *le prolongement par continuité* de $f$ au point $a$. Souvent, on notera encore ce prolongement $f$.

**Exemple 4.** *On considère la fonction $f$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = (\sin x)/x$$

*On a* $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = 1$. *On* prolonge $f$ par continuité *en posant* $f(0) = 1$.

#### 2.3.2. Propriétés algébriques

Soit $I$ un intervalle, voisinage d'un point $a$, $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles ou complexes dont l'ensemble de définition contient $I$.

**Théorème 2.6.** *Si les fonctions $f$ et $g$ sont continues en $a$, on a :*
*1. la fonction $f+g$ est continue en $a$ ;*
*2. pour tout scalaire $\lambda$, la fonction $\lambda f$ est continue en $a$ ;*
*3. la fonction $fg$ est continue en $a$.*

**Exemple 5.** *L'application du théorème 2.6 permet de montrer qu'une fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*

En effet :
*i.* la fonction id : $x \mapsto x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ ;
*ii.* une récurrence simple, utilisant le point 3. du théorème 2.6, établit la continuité de la fonction $x \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en tout point de $\mathbb{R}$ ;
*iii.* le point 2. permet d'établir la continuité de la fonction $x \mapsto \lambda x^n$, pour tout $(n, \lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$ et en tout point de $\mathbb{R}$ ;
*iv.* le point 1. et une récurrence finie montre alors la continuité de toute fonction polynôme en tout point de $\mathbb{R}$.

**Théorème 2.7.** *Si l'on suppose de plus que $g(a)$ est non nul, alors :*
*1. il existe un intervalle $J$, voisinage de $a$ sur lequel la fonction $g$ est non nulle ;*
*2. la fonction $f/g$ dont l'ensemble de définition contient $J$ est continue au point $a$.*

Ces théorèmes sont conséquences des théorèmes analogues du chapitre consacré aux limites. On laisse au lecteur le soin d'énoncer les théorèmes relatifs aux cas où $f$ et $g$ sont supposées continues à gauche ou à droite au point $a$.

**Exemple 6.** *L'application du théorème 2.7 permet de montrer qu'une fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition, c'est-à-dire en tout point où son dénominateur ne s'annule pas.*

On peut également énnoncer les propriétés suivantes liées à la valeur absolue ou au module et à la relation d'ordre :

**Théorème 2.8.** *Si les fonctions $f$ et $g$ sont continues en $a$, on a :*
*1. la fonction $|f|$ est continue en $a$ ;*
*2. **si les fonctions $f$ et $g$ sont à valeurs réelles**, les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues en $a$.*

**Preuve.** - Le 1. découle de l'inégalité : $\forall x \in I, \quad ||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$.
Le 2. vient des égalités entre fonctions

$$\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|) \quad \inf(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|),$$

et de l'application du point 1. de ce théorème et du théorème 2.6, points 1. et 2.□

### 2.3.3. Composition

L'énoncé du théorème de composition des limites vu au chapitre concerné peut être simplifié si l'on ajoute une hypothèse de continuité. Voici l'énoncé.

**Proposition 2.9.** *Soit $A$ une partie une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $A$, $b$ un nombre réel et $f$ une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble de définition contient $A$ et tendant vers $b$ pour $x$ tendant vers $a$, suivant $A$. Soit $g$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle $J$, voisinage de $b$ et continue au point $b$. Alors la fonction $g \circ f$ admet $g(b)$ comme limite en $a$ suivant $A$.*

**Preuve**.- Tout d'abord remarquons que comme $J$ est voisinage de $b$, il existe $\delta > 0$ tel que l'intervalle $J' = ]b-\delta, b+\delta[$ soit inclus dans $J$. Puis comme $\lim_{x \to a, x \in A} f(a) = b$, il existe $\eta > 0$ (‹‹ relatif à $\delta$ ››) tel que

$$\forall x \in A \cap ]a-\eta, a+\eta[, \quad f(x) \in ]b-\delta, b+\delta[.$$

La fonction $g \circ f$ est définie sur $A' = A \cap ]a-\eta, a+\eta[$. Les notions en jeu étant locales, nous travaillerons sur $A'$ et $J'$. La preuve se poursuit comme dans le théorème composition des limites. Soit $\varepsilon' > 0$. Il existe $\delta' > 0$ tel que

$$\forall y \in J', \quad |y - b| < \delta' \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon'.$$

Relativement à $\delta'$, il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\forall x \in A', \quad |x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - b| < \delta'.$$

Comme $f(A') \subset J'$, il vient (en faisant ‹‹jouer à $f(x)$ le rôle de $y$››)

$$\forall x \in A', \quad |x - a| < \eta' \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon'.$$

D'où le résultat.□

On en déduit le théorème suivant.

**Théorème 2.10.** *Soit $I$ un intervalle $\mathbb{R}$, voisinage d'un point $a$ et $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur $I$ et continue en $a$. Soit $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$ voisinage de $f(a)$ et $g$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $J$ et continue au point $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$, qui est définie sur un intervalle voisinage de $a$, est continue en $a$.*

Dans le cadre d'un exposé d'oral, on peut se limiter à l'énoncé suivant :

**Théorème 2.11.** *Soit $I$ un intervalle $\mathbb{R}$, voisinage d'un point $a$ et $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur $I$ et continue en $a$. Soit $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$ voisinage de $f(a)$ tel que $f(I) \subset J$.et $g$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie (au moins) sur $J$, continue au point $b = f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$, qui est définie sur $I$, est continue en $a$.*

**Preuve.-** Démontrons ce théorème de manière indépendante des précédents. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in J, \qquad |y - b| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon.$$

Relativement à $\delta$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Comme $f(I) \subset J$, il vient (en faisant ‹‹jouer à $f(x)$ le rôle de $y$››)

$$\forall x \in I, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon.$$

D'où le résultat.□

### 2.3.4. Continuité et suites

**Théorème 2.12.** *Soit $I$ un intervalle $\mathbb{R}$, voisinage d'un point $a$ et $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*1. la fonction $f$ est continue au point $a$ ;*
*2. pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $I$ convergeant vers $a$, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

**Preuve.-** C'est un corollaire du théorème correspondant du chapitre consacré aux limites.□

**Remarque 4.** *On utilise parfois ce théorème pour montrer qu'une fonction $f$ n'est pas continue en un point. On montre, par exemple, l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $f(a)$. On donne un exemple ci-dessous. On trouve dans le paragraphe consacré à l'image par une fonction d'un intervalle fermé borné une autre application de ce résultat.*

**Exemple 7.** *On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \sin(1/x), \quad f(0) = b \in \mathbb{R}.$$

*En utilisant la négation du théorème 2.12 on montre qu'aucune valeur $b \in \mathbb{R}$ ne rend $f$ continue en 0. Il suffit de trouver deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a'_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(a'_n)$.*

## 3. Fonction continue

*Cette section contient des résultats fondamentaux, pour les fonctions continues d'une variable réelle : le théorème des valeurs intermédiaires, les propriétés de l'image par une fonction continue d'un intervalle et notamment d'un intervalle fermé borné. Il est indispensable pour tout candidat au CAPES de les connaître et de savoir les démontrer.*

### 3.1. Définitions

**Définition 3.** *Soit $I$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I$. On dit que $f$ est (une fonction) continue sur $I$ si $f$ est continue en tout point de $I$.*

**Remarque.-** Un intervalle ouvert $I$ est voisinage de chacun de ces points : ceci donne un sens à la définition.

**Définition 4.** *Soit $I = [a, b]$, un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I$. On dit que $f$ est (une fonction) continue sur $I$ si $f$ est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite en $a$ et à gauche en $b$.*

Le lecteur écrira les définitions d'une fonction continue sur un intervalle $I$ quelconque en s'inspirant des définitions 3 et 4. On peut généraliser ces définitions à une fonction définie sur un ensemble ouvert quelconque de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire à $f$ définie sur une réunion d'intervalles ouverts.

### 3.2. Propriétés algébriques des fonctions continues

Les théorèmes 2.6, 2.7, 2.8 et 2.10 entrainent immédiatement les résultats suivants.

**Théorème 3.1.** *Soit $I$ un intervalle, $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles (resp. complexes) définies sur $I$, continues sur $I$ et $\lambda$ un nombre réel (resp. complexe). Alors :*
*1. les fonctions $|f|$, $\lambda f$ , $f+g$ et $fg$ sont continues sur $I$ ;*
*2.* ***si les fonctions $f$ et $g$ sont à valeurs réelles,*** *les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues sur $I$ ;*
*3. si l'on suppose de plus que la fonction $g$ ne s'annule pas sur $I$, la fonction $f/g$ est continue sur $I$.*

**Théorème 3.2.** *Soit $I$ un intervalle ouvert $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $I$. Soit $J$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et continue sur $J$. On suppose $f(I) \subset J$. Sous ces hypothèses, la fonction $g \circ f$ est continue sur $I$.*

### 3.3. Le théorème des valeurs intermédiaires

*Toutes les fonctions considérées dans ce paragraphe seront* à valeurs réelles.

On énonce une première version du théorème :

**Théorème 3.3.** *Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et $\varphi$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$, à valeurs réelles, telle que $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ soient non nuls et de signes contraires. Alors, il existe $c$ appartenant à $]a,b[$ tel que $\varphi(c)$ soit nul.*

**Preuve**.- Avec les notations du lemme, nous supposerons par exemple $\varphi(a) < 0$ et $\varphi(b) > 0$. Notons alors $J = \{x \in I \mid \forall \xi \in [a,x] \ \ \varphi(\xi) < 0\}$.
L'ensemble $J$ est un intervalle borné, non vide puisque $a \in J$ et différent de $J$ puisque $b \notin J$. Soit $c$ la borne supérieure de $J$. La proposition 2.2 entraine que $c \notin J$. En effet si $\varphi(c)$ était strictement négatif, il existerait $\delta > 0$ tel que

$$\forall \xi \in [c, c+\delta[ \quad \varphi(\xi) < 0.$$

Ce qui contredit le fait que $c$ est la borne supérieure de $J$. On a donc $\varphi(c) \geq 0$. Mais si $\varphi(c)$ était strictement positif, il existerait $\delta' > 0$ tel que $\forall \xi \in ]c-\delta', c] \quad \varphi(\xi) > 0$, contredisant de nouveau le fait que $c$ est la borne supérieure de $J$. On a donc $\varphi(c) = 0$.□

**Théorème 3.4.** ***Théorème des valeurs intermédiaires.****- Soit $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie et continue sur $I$, à valeurs réelles. Pour tout couple $(a,b)$ de points de $I$ et tout point $y$ appartenant au segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in I$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = y$.*

**Preuve**.- Soit donc $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$. Si $f(a) = f(b)$, on a $y = f(a)$ et $a$ convient. Nous supposerons donc $f(a) \neq f(b)$. Si $y = f(a)$ (*resp.* $y = f(b)$), le point $a$ (*resp.* $b$) fournit une solution. Il reste le cas où $y$ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On applique alors le lemme 3.3 à la fonction $\varphi$ définie sur $[a,b]$ par $\varphi(x) = f(x) - y$. Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et vérifie en effet $\varphi(a)\varphi(b) < 0$.□

Un énconcé équivalent au théorème 3.4 est le suivant.

**Théorème 3.5.** *Soit $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie et continue sur $I$, à valeurs réelles. L'image par $f$ de tout intervalle $J$ inclus dans $I$ est un intervalle.*
*En particulier $f(I)$ est un intervalle.*

**Preuve**.
1. *Supposons le théorème 3.4 vrai.* Soit $J$ un intervalle inclus dans $I$ et $(f(a), f(b))$ un couple de points de $f(J)$. Tout point $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est image par $f$ d'un point compris entre $a$ et $b$, donc d'un point de $J$. Ainsi, $y$ appartient à $f(J)$ et le segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$ est inclus dans $f(J)$. Ainsi $f(J)$ est un intervalle.

2. *Supposons le théorème 3.5 vrai.* Soit $(f(a), f(b))$ un couple de points de $f(I)$, avec par exemple $a < b$. Posons $K = f([a,b])$. Comme $K$ est un intervalle, le segment $[f(a), f(b)]$ est inclus dans $K$ et tout $y \in [f(a), f(b)]$ est image d'un point de $[a,b]$.□

Le lecteur pourra établir, à titre d'exercice, les corollaires suivants des résultats ci-dessus. Le premier est une version assez générale du théorème des valeurs intermédiaires. Le second est en fait déjà un corollaire facile du théorème 3.3.

**Théorème 3.6.** *Soit $I = ]a, b[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, avec $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$ et $f$ une fonction définie, continue sur $I$ et à valeurs réelles. On suppose de plus qu'existent $\lim_{x \to a, x > a} f(x)$ et $\lim_{x \to b, x < b} f(x)$, ces limites pouvant être infinies. Pour tout $y$ strictement compris entre $\lim_{x \to a, x > a} f(x)$ et $\lim_{x \to b, x < b} f(x)$, il existe $c$ appartenant à $I$ tel que $f(c) = y$.*
*En particulier si $\lim_{x \to a, x > a} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to b, x < b} f(x) = +\infty$, l'image de $I$ par $f$ est $\mathbb{R}$.*

**Théorème 3.7.** *Soit $f$ une fonction une fonction définie, continue sur un intervalle $I$ et à valeurs réelles. Si $f$ ne s'annule pas, alors $f$ garde un signe constant sur $I$.*

### 3.4. Fonction continue sur un intervalle fermé borné

*Le résultat suivant est fondamental et sera souvent utilisé dans la suite. Sa démonstration n'est pas très difficile, si l'on admet le théorème de Bolzano-Weierstrass.*

**Théorème 3.8.** *Soit $I = [a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction continue définie sur $I$* ***à valeurs réelles****. L'intervalle $f(I)$ est un intervalle fermé borné. En particulier, il existe $x_1 \in [a, b]$ et $x_2 \in [a, b]$ tels que*

$$f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

**Preuve**.- D'après le théorème 3.5, $f(I)$ est un intervalle : il reste à voir qu'il s'agit d'un intervalle borné, et qu'il contient ses bornes.
1. *$f$ est bornée*.- Procédons par l'absurde. Si $f$ n'était pas bornée $f$ serait soit non majorée, soit non minorée. Supposons par exemple $f$ non majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existerait $\xi_n \in I$ tel que $f(\xi_n) > n$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possèderait une sous-suite, notée $(\xi_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$, convergente. Soit $c$ sa limite. Comme $f$ est continue sur $I$, la suite $(f(\xi_{n_p}))_{p \in \mathbb{N}}$ convergerait vers $f(c)$. Or l'inégalité $f(\xi_{n_p}) > n_p$ entraine la divergence de la suite $(f(\xi_{n_p}))_{p \in \mathbb{N}}$.
L'intervalle $f(I)$ est donc borné. Posons

$$m = \inf(f(I)) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad M = \sup(f(I)) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

2. *Les valeurs $m$ et $M$ sont prises par $f$*.- Montrons par exemple que $M$ est valeur prise par $f$. Les propriétés d'une borne supérieure entrainent que pour tout entier $n$ il existe $\xi_n \in [a, b]$ tel que

$$M - 1/(n + 1) < f(\xi_n) \leq M.$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous suite, notée $(\xi_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$, convergente. Notons $x_2 \in [a, b]$ sa limite. La suite $(f(\xi_{n_p}))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x_2)$, avec

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad M - 1/(n_p + 1) < f(\xi_{n_p}) \leq M.$$

D'où, par prolongement d'inégalité $f(x_2) = M$, puisque $\lim_{p \to +\infty} 1/(n_p + 1) = 0$.$\square$

Dans le cas d'une fonction à valeurs complexes, le théorème 3.8 entraine le résultat suivant.

**Théorème 3.9.** *Soit $I = [a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction continue définie sur $I$, à valeurs complexes. La fonction $f$ est bornée et la fonction $|f|$ atteint ses bornes. En particulier, il existe $x_1 \in [a, b]$ et $x_2 \in [a, b]$ tels que*

$$f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} |f(x)| \qquad f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

**Preuve**.- D'après le théorème 3.1, la fonction $|f|$ est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème 3.8, l'intervalle $f(I)$ est fermé et borné. En particulier, il existe $x_1 \in [a, b]$ et $x_2 \in [a, b]$ tels que

$$f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} |f(x)| \qquad f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.\square$$

## 4. Monotonie et continuité - homéomorphismes

### 4.1. Monotonie, limites et continuité

Dans ce paragraphe, $I$ sera un intervalle d'intérieur non vide et $f$ une application définie sur $I$ à valeurs réelles. On notera, pour $a \in I$, lorsque cela a un sens

$$f(a^-) = \lim_{x \to a, x < a} f(x) \qquad f(a^+) = \lim_{x \to a, x > a} f(x).$$

**Théorème 4.1.** *On suppose $f$ monotone sur $I$.*
*1. L'application $f$ possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point de l'intérieur de $I$. De plus si $f$ est croissante (resp. décroissante)*

$$f(a^-) = \sup_{x\in]-\infty,a[\cap I} f(x), \qquad f(a^+) = \inf_{x\in]a,+\infty[\cap I} f(x) \tag{4.1}$$

$$(\textit{resp.}\quad f(a^-) = \inf_{x\in]-\infty,a[\cap I} f(x), \qquad f(a^+) = \sup_{x\in]a,+\infty[\cap I} f(x)\,). \tag{4.2}$$

*2. Si $I$ est majoré (resp. minoré) et si $\sup I$ (resp. $\inf I$ ) appartient à $I$, $f$ possède une limite à droite (resp. à gauche) en $\sup I$ (resp. $\inf I$ ).*

**Preuve**.
*i*. Traitons le cas où $f$ est croissante et où $a$ est un point intérieur à $I$. Posons

$$E = \{f(x), \ \ x \in ]-\infty, a[\cap I\}.$$

L'ensemble $E$ est non vide et majoré par $f(a)$ ; il possède une borne supérieure, notée $l = \sup E$, candidat à être la limite à gauche en $a$. Soit en effet $\varepsilon > 0$. Comme $l = \sup E$, il existe $x \in ]-\infty, a[\cap I$ tel que $l-\varepsilon < f(x) \leq l$. Posons $\eta = a - x$. La croissance de $f$ entraine alors

$$\forall x \in ]-\infty, a[\cap I, \ \ a-\eta \leq x < a \Longrightarrow l-\varepsilon < f(x) \leq l.$$

Ainsi $f(a^-) = \sup_{x\in]-\infty,a[\cap I} f(x)$.
Une démonstration analogue montre que

$$f(a^+) = \inf_{x\in]a,+\infty[\cap I} f(x)$$

*ii*. Le cas $f$ décroissante se traite en appliquant le *i*. à $-f$. Le cas d'une borne de $I$ se traite de manière analogue.□

**Remarque**.- Supposons $f$ croissante. Soit $a$ un point de l'intérieur de $I$. Pour tout $(x, y) \in I^2$, avec $x < a < y$, on a

$$f(x) \leq f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+) \leq f(y).$$

Ceci résulte directement de la croissance de $f$ et des propriétés 4.1.□

**Théorème 4.2.** *Si $f$ est monotone sur $I$, l'ensemble $D$ des points de discontinuité de $f$ est au plus dénombrable.*

**Preuve**.- On propose deux démonstrations qui reposent à la base sur la dénombrabilité de l'ensemble $\mathbb{N}$, qui entraine celle de $\mathbb{Q}$, et sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
*Première démonstration.*- Nous nous placerons dans l'hypothèse ou $f$ est croissante. A chaque point $x$ intérieur à $I$, on fait correspondre l'intervalle $J_x = ]f(x^-), f(x^+)[$. S'il y a lieu, on fait correspondre à la borne inférieure $a$ (*resp.* borne supérieure $b$) de $I$, si elle appartient à $I$, l'intervalle

$$J_a = ]f(a), f(a^+)[ \quad ; \quad (\textit{resp.}\quad J_b = ]f(b^-), f(b)[\,).$$

Pour tout $x$ appartenant à $I$, on remarque que $J_x$ est non vide si, et seulement si, $f$ n'est pas continue en $x$ ; en outre, pour deux points de $I$ distinct, $x$ et $y$, les intervalles $J_x$ et $J_y$ ont une intersection vide, en raison de la croissance de $f$.
On désigne alors par $E$ l'ensemble des points de discontinuité de $f$. Pour chaque $x \in E$, on choisit un rationnel $r(x)$ appartenant à l'intervalle non vide $J_x$. L'application $r$ ainsi définie sur $E$, à valeurs rationnelles, est injective par construction de $r(x)$ et des intervalles $J_x$. L'ensemble $E$ est donc au plus dénombrable, puisqu'il s'injecte dans un ensemble dénombrable.□

*Deuxième démonstration.*- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ croissante. Notons $E(I, f)$ l'ensemble des points de discontinuité de $f$.
*i*. Supposons d'abord $I$ fermé borné. On définit une fonction $s : I = [a, b] \to \mathbb{R}$, par

$$s(a) = f(a^+) - f(a), \quad \forall x \in ]a, b[\,, \ \ s(x) = f(x^+) - f(x^-), \quad s(b) = f(b) - f(b^-).$$

La fonction $s$ est à valeurs positives, car $f$ est croissante. On a de plus clairement

$$s(x) \neq 0 \Longleftrightarrow f \text{ n'est pas continue en } x.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \{x \in I \mid s(x) > 1/(n+1)\}$. Soit $k \geq 1$ un entier et $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de points de $E_n$ rangés dans l'ordre croissant. On a

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i=1}^{k} s(x_i) &= \textstyle\sum_{=1}^{p} \left(f(x_i^+) - f(x_i^-)\right), \\ &\leq f(x_p^+) - \underline{\textstyle\sum_{i=1}^{p-1} \left(f(x_{i+1}^-) - f(x_i^+)\right)} - f(x_1^-) \leq f(b) - f(a),\end{aligned}$$

la quantité soulignée étant positive.
D'autre part, il vient $\sum_{i=1}^{k} s(x_i) > k/(n+1)$. Ainsi $k < (f(b) - f(a))\,(n+1)$. On en déduit que le cardinal de $E_n$ est fini. Comme $E(I, f)$, est réunion des $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est au plus dénombrable.

*ii.* Supposons $I$ quelconque.- Tout intervalle réel $I$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles fermés bornés. Posons $I = \cup_{m\in\mathbb{N}} I_m$. On a $E(I, f) = \cup_{m\in\mathbb{N}} E(I_m, f)$. Ainsi $E(I, f)$ est au plus dénombrable, comme réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.□

**Théorème 4.3.** *On suppose $f$ monotone sur $I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*1. l'application $f$ est continue sur $I$ ;*
*2. $f(I)$ est un intervalle.*

**Preuve.**
[1 ⇒ 2] Sans l'hypothèse de monotonie, cela est vrai d'après le théorème 3.5.

[2 ⇒ 1] Placons nous dans le cas où $f$ est croissante. Nous allons montrer la contraposée. Nous ferons donc l'hypothèse que $f$ n'est pas continue sur $I$. En raison de la croissance de $f$, il existe alors $a \in I$ tel que $f(a^-) < f(a)$ ou $f(a) < f(a^+)$, l'une des égalités ayant un sens si $a$ est une extrémité (éventuelle) de $I$.

Si $a$ n'est pas une extrémités de $I$, il existe $b$ appartenant à $]-\infty, a[\cap I$, $c$ appartenant à $]a, +\infty[\cap I$ avec $f(b) \leq f(a^-)$ et $f(a^+) \leq f(c)$. Le segment $[f(b), f(c)]$ n'est pas inclus dans $f(I)$ puisque

$$\forall x \in [b, a[, \ \ \forall y \in ]a, c], \qquad f(x) \leq f(a^-) < f(a^+) \leq f(y).$$

Si $a$ est une extrémité de $I$, par exemple sa borne supérieure (en supposant qu'elle existe), il existe $b \in ]-\infty, a[\cap I$, avec $f(b) \leq f(a^-) < f(a)$. Dans ce cas, le segment $[f(b), f(a)]$ n'est pas inclus dans $f(I)$ puisque $]f(a^-), f(a)[\cap f(I) = \emptyset$.

En conclusion, $f(I)$ ne satisfait pas la caractérisation des intervalles.□

### 4.2. Homéomorphismes

#### 4.2.1. Définition et remarque

**Définition 5.** *Soit $I$ un intervalle et $f$ une application définie sur $I$. On dit que $f$ est un* homéomorphisme *si $f$ est continue, bijective et si sa fonction réciproque est une fonction continue.*

**Remarque.**- Si une fonction $f$ est continue, $f(I)$ est un intervalle : la fonction réciproque de $f$ (lorsqu'elle existe) est définie sur un intervalle, ce qui permet de poser le problème de sa continuité.

#### 4.2.2. Caractérisation des homéomorphismes

**Théorème 4.4.** *Soit $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f$ une application définie sur $I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*1. l'application $f$ est un homéomorphisme ;*
*2. l'application $f$ est continue et strictement monotone ;*
*3. l'application $f$ est continue et injective.*

**Preuve**.
[1 ⇒ 3] C'est clair : un homéomorphisme est en particulier une application continue et injective.

[3 ⇒ 2]
*Première méthode : une démonstration à la main.*- On procède en deux étapes.
*i.* Pour tout triplet $(a, b, c) \in I^3$ , avec $a < b < c$, $f(b)$ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(c)$.

Soit $(a, b, c)$ un tel triplet. Puisque $f$ est supposée injective une des deux inégalités $f(a) < f(c)$ ou $f(c) < f(a)$ est vraie. Supposons $f(a) < f(c)$. Si $f(b) \notin ]f(a), f(c)[$, soit $f(b) < f(a)$, soit $f(c) < f(b)$. Placons dans le second cas. On a alors $f(c) \in [f(a), f(b)]$ et il existe $d \in [a, b]$ tel que $f(c) = f(d)$, d'après le

théorème des valeurs intermédiaires. Ceci est absurde, en raison de l'injectivité de $f$. C'est donc que $f(b) \in ]f(a), f(c)[$.

*ii*. Etant donné un couple $(a, b)$ de points de $I$, avec $a < b$ on a soit $f(a) < f(b)$, soit $f(a) > f(b)$. On démontre que :
2.1. si $f(a) < f(b)$ alors $\forall (x, y) \in I^2 \;\; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ ;
2.2. si $f(a) > f(b)$ alors $\forall (x, y) \in I^2 \;\; x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
La méthode consiste à examiner toutes les positions relatives des points $x, y, a$ et $b$. Par exemple, si

$$x < y < a < b$$

on a, d'une part, $f(y) < f(a)$. En effet, sinon on aurait $f(y) > f(a)$. Alors, comme $y < a < b$, le point 1. entrainerait que $f(a)$ est strictement compris entre $f(y)$ et $f(b)$ d'où $f(a) > \min(f(y), f(b)) = f(b)$. Ceci est absurde, puisque $f(a) < f(b)$ par hypothèse. On renouvelle le raisonnement avec le triplet $(x, y, a)$ à la place du triplet $(y, a, b)$. En conclusion $f(x) < f(y)$.
Les autres situations se traitent de manière analogue.

*Deuxième méthode.*- On démontre le point *ii.* ci-dessus de manière directe. Supposons par exemple qu'il existe un $(a, b)$ de points de $I$, avec $a < b$ et $f(a) < f(b)$. Montrons alors par l'absurde que

$$\forall (x, y) \in I^2 \;\; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Soit donc $x$ et $y$ deux points de $I$ avec $f(x) \geq f(y)$. Posons

$$\forall t \in [0, 1] \qquad g(t) = (1 - t)a + tx \qquad h(t) = (1 - t)b + ty,$$

Les fonctions $g$ et $h$ vérifient :
1. $\forall t \in [0, 1] \;\; g(t) < h(t)$ (en raison des inégalités $a < b$ et $x < y$) ;
2. $g([0, 1]) \subset I$ et $h([0, 1]) \subset I$ (en effet $g([0, 1])$ est le segment d'extrémités $a$ et $x$, qui est inclus dans $I$, puisque $I$ est un intervalle contenant $a$ et $x$ ; le lecteur écrira l'argument analogue pour $h$).
On pose alors, pour $t \in [0, 1]$,

$$\varphi(t) = f(g(t)) - f(h(t)).$$

La fonction $\varphi$ est continue sur $[0, 1]$ comme différence de deux fonctions, chacune composée de fonctions continues. On a de plus

$$\varphi(0) = f(a) - f(b) < 0 \quad \varphi(1) = f(x) - f(y) \geq 0$$

Il existe donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $c$ éventuellement égal à 1 tel que $\varphi(c) = 0$. Donc $f(g(c)) = f(h(c))$ : par injectivité de $f$, il en résulte que $g(c) = h(c)$. Cette dernière égalité contredit la propriété 1. des fonctions $g$ et $h$ ci-dessus.

$[2 \Rightarrow 1]$ L'application $f$ étant continue et strictement monotone, $f(I)$ est un intervalle et $f$ réalise une bijection de $I$ sur $J = f(I)$. Alors $f$ possède une application réciproque $f^{-1}$ définie sur l'intervalle $J$. Elle est en particulier monotone, comme fonction réciproque d'une fonction monotone. (Le lecteur est invité à redémontrer ce résultat.) Selon le théorème 4.3 $f^{-1}$ est continue sur $J$.□




**PLC1-Mathématiques**
**Auteur : A. Delcroix**

OUTILS POUR
L'ETUDE LOCALE DES FONCTIONS

# 1. En guise d'introduction

## 1.1. Un conseil sur ces outils

Nous donnons des rappels sur deux outils d'étude locale des fonctions, la comparaison des fonctions et les développements limités. Ces outils, peut être parce qu'il y est question d'être négligeable, équivalent, sont souvent maniés de manière un peu floue alors, que tout au contraire, la rigueur doit être, ici comme ailleurs, absolue sous peine de commettre des erreurs graves.

## 1.2. Notation

Dans tout ce document, on notera, pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des intervalles ouverts, voisinages de $x$. Pour $x = +\infty$ (*resp.* $x = -\infty$), $\mathcal{V}_x$ sera l'ensemble des intervalles du type $]a, +\infty[$ (*resp.* $]-\infty, a[$ ), $a$ décrivant $\mathbb{R}$.

# 2. Comparaison des fonctions

## 2.1. Conventions

**Dans toute la suite de la section 2 à l'exception de son dernier paragraphe, on supposera donnés $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $x_0$ un point de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à $\overline{A}$ et $I_0$ un élément de $\mathcal{V}_{x_0}$.**

Les fonctions considérées seront définies sur un ensemble contenant $A \cap I_0$, à valeurs réelles ou complexes, sauf mention du contraire, sans que cela soit explicitement rappelé dans chacun des énoncés.

Dans les cas pratiques, les fonctions seront soit définies sur un voisinage de $x_0$ ($A = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$), soit sur un voisinage *pointé* de $x_0$ ($A = \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$), soit sur un voisinage à gauche ou à droite de $x_0$, contenant ou non $x_0$. On laisse au lecteur le soin de trouver les parties $A$ qui correspondent à ces derniers cas de figure.

## 2.2. La relation de domination

**Définition 1.** *On dit que $f$ est* dominée *par $g$ au voisinage de $x_0$ (suivant $A$) s'il existe $I \in \mathcal{V}_{x_0}$ inclus dans $I_0$ et $K \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que*

$$\forall x \in I \cap A, \qquad |f(x)| \leq K\,|g(x)|\,.$$

**Notations.-** Si $f$ est dominée par $g$ on notera $f = \mathrm{O}(g)$ (notation de Landau) ou bien $f \preceq g$ (notation de Hardy). On précisera *au voisinage de $x_0$ suivant $A$* ou *en $x_0$ suivant $A$* en cas de confusion possible. La précision *suivant $A$* sera omise s'il n'y a pas d'ambiguité sur la partie $A$. On pourra également utiliser les notations suivantes

$$f\,(x) = \underset{x\to x_0}{\mathrm{O}}\,(g\,(x)) \qquad f\,(x) = \underset{x\to x_0}{\preceq}\, g\,(x)\,.$$

**Exemple 2.1.** *On a l'équivalence :*
*1. $f$ est bornée au voisinage de $x_0$,*
*2. $f = \mathrm{O}(1)$, au voisinage de $x_0$.*

**Exemple 2.2.** *On a $x^a = \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^b)$ si et seulement si $a \geq b$ et $x^a = \underset{x\to +\infty}{\mathrm{O}}(x^b)$ si et seulement si $a \leq b$.*

**Remarques.**
1. Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de $x_0$, il existe $J \in \mathcal{V}_{x_0}$ tel que sur $J \cap A$ tout zéro de $g$ est un zéro de $f$.
2. La fonction nulle est dominée par toute fonction.

On peut considérer la relation O comme une relation binaire sur les couples de fonctions définies sur $A \cap I_0$. Cette relation est *réflexive et transitive* (preuve facile). De plus, on dispose de la proposition suivante, de démonstation facile.

**Proposition 2.1.**
*1. Soient $f_1$, $f_2$, $g$ trois fonctions définies au moins sur $A \cap I_0$ et $\lambda$ un scalaire. Si $f_1 = \mathrm{O}(g)$ et $f_2 = \mathrm{O}(g)$, alors*

$$f_1 + f_2 = \mathrm{O}(g) \quad ; \quad \lambda f_1 = \mathrm{O}(g).$$

*2. Soient $f_1$, $f_2$, $g_1$ et $g_2$ des fonctions définies au moins sur $A \cap I_0$. Si $f_1 = \mathrm{O}(g_1)$ et $f_2 = \mathrm{O}(g_2)$, alors*

$$f_1 f_2 = \mathrm{O}(g_1 g_2).$$

Mais *attention*, dans les mêmes conditions il est en général faux que l'on ait $f_1 + f_2 = \mathrm{O}(g_1 + g_2)$ comme le montre le contre-exemple suivant :

**Exemple 2.3.** *On prend $x_0 = +\infty$, $f_1 = x^2$, $f_2 = x - x^2$, $g_1 = x^2 + 1$, $g_2 = -x^2$. On vérifie sans problème que $f_1 = \mathrm{O}(g_1)$ et $f_2 = \mathrm{O}(g_2)$, mais $f_1 + f_2 = x$ et $g_1 + g_2 = 1$.*

**Remarque.-** On définit parfois la relation de *similitude* sur les couples de fonctions. On dit que deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $A \cap I_0$ sont *similaires au voisinage de $x_0$, suivant $A$* si $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{O}(f)$, au voisinage de $x_0$, suivant $A$. Cela se traduit par l'existence d'un intervalle $I \in \mathcal{V}_{x_0}$ inclus dans $I_0$ et de deux réels $\alpha$ et $\beta$ strictement positifs tels que

$$\forall x \in I \cap A, \quad \alpha \left|g(x)\right| \leq \left|f(x)\right| \leq \beta \left|g(x)\right|.$$

On vérifie facilement que la relation de similitude est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies sur $A \cap I_0$.

### 2.3. La relation de prépondérance

**Définition 2.** *On dit que $f$ est* négligeable *devant $g$, ou que $g$ est* prépondérante *devant $f$ au voisinage de $x_0$ (suivant $A$) si*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \eta > 0) \quad (\forall x \in I \cap A) \quad \left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon \left|g(x)\right|\right).$$

**Notation.-** Si $f$ est négligeable devant $g$, on notera $f = \mathrm{o}(g)$ (notation de Landau) ou bien $f \prec g$ (notation de Hardy). En cas de confusion possible, on ajoutera *au voisinage de $x_0$ suivant $A$* ou *en $x_0$ suivant $A$*. La précision *suivant $A$* sera omise s'il n'y a pas d'ambiguité sur la partie $A$. On pourra également utiliser les notations suivantes

$$f(x) = \underset{x \to x_0}{\mathrm{o}}(g(x)) \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{=\prec} g(x)$$

**Remarque.-** Si $f$ est négligeable devant $g$, $f$ est dominée par $g$.
On en déduit en particulier que si $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de $x_0$, il existe $J \in \mathcal{V}_{x_0}$ tel que sur $J \cap A$ tout zéro de $g$ est un zéro de $f$.

**Exemple 2.4.** *On a l'équivalence :*
*1. $f$ tend vers $0$ pour $x$ tendant vers $x_0$ ;*
*2. $f = \mathrm{o}(1)$, au voisinage de $x_0$.*

**Exemple 2.5.** *On a $x^a = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^b)$ si et seulement si $a > b$ et en $x = +\infty$, on a $x^a = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}(x^b)$ si et seulement si $a < b$.*

On démontre cette propriété en écrivant $x^a = x^{a-b} x^b$. C'est ce principe que l'on généralise dans la propriété :

**Proposition 2.2.** *Soient $f$, $g$ deux fonctions définies sur le même voisinage de $x_0$. Sont équivalentes :*
*1. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de $x_0$ suivant $A$ ;*
*2. il existe un intervalle $J \in \mathcal{V}_{x_0}$ et une fonction $\varphi$ définie sur $A \cap J$ tels que $f = \varphi g$ sur $A \cap J$ avec $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \in A} \varphi(x) = 0$.*

**Preuve.-** L'implication [2 ⇒ 1] est claire (on écrit simplement la définition de la limite, pour la fonction $\varphi$). Pour l'implication [1 ⇒ 2], on sait qu'il existe un intervalle $J$ inclus dans $I_0$ sur lequel tout zéro de $g$ est un zéro de $f$. On définit alors une fonction $\varphi$ pour $x \in A \cap J$ par

$$\varphi(x) = 0, \text{ si } g(x) = 0 \ ; \ \varphi(x) = f(x)/g(x), \text{ si } g(x) \neq 0.$$

On vérifie que l'on a bien $f(x) = \varphi(x)g(x)$ pour tout $x \in A \cap J$, en étudiant séparement les cas $g(x) \neq 0$ et $g(x) = 0$.
Comme $f = \mathrm{o}(g)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\forall x \in A \cap J) \quad (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\,|g(x)|)\,.$$

On constate alors, en étudiant de nouveau séparement les cas $g(x) \neq 0$ et $g(x) = 0$, que

$$(\forall x \in A \cap J) \quad (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\,|g(x)|)\,.$$

D'où la conclusion $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \in A} \varphi(x) = 0.\square$

On peut considérer la relation o comme une relation binaire sur l'ensemble des fonctions définies sur $A \cap I_0$. Cette relation est *transitive* (preuve facile) et de plus :

**Proposition 2.3.**
*1. Soient $f_1$, $f_2$, $g$ trois fonctions définies sur $A \cap I_0$ et $\lambda$ un scalaire. Si $f_1 = \mathrm{o}(g)$ et $f_2 = \mathrm{o}(g)$, alors*

$$f_1 + f_2 = \mathrm{o}(g) \quad ; \quad \lambda f_1 = \mathrm{o}(g).$$

*2. Soient $f_1$, $f_2$, $g_1$et $g_2$ des fonctions définies sur $A \cap I_0$. Si $f_1 = \mathrm{o}(g_1)$ et $f_2 = \mathrm{o}(g_2)$, alors $f_1\ f_2 = \mathrm{o}(g_1 g_2)$.*

La démonstration de la proposition 2.3 est immédiate, en utilisant la caractérisation de la proposition 2.2. Elle découle simplement des propriétés algébriques des limites.

Comme pour la relation de domination, il est en général faux que l'on ait, dans les conditions de la proposition 2.3, $f_1 + f_2 = \mathrm{o}(g_1 + g_2)$. En voici un exemple.

**Exemple 2.6.** *On prend $x_0 = +\infty$, $f_1 = 1 + x^2$, $f_2 = x^2 - 1$, $g_1 = 1 + x^3$, $g_2 = 1 - x^3$. On vérifie sans problème que $f_1 = \mathrm{o}(g_1)$ et $f_2 = \mathrm{o}(g_2)$, mais $f_1 +\ f_2 = 2x^2$ et $g_1 + g_2 = 2$.*

### 2.4. La relation d'équivalence

**Définition 3.** *On dit que $f$ est* équivalente *à $g$ au voisinage de $x_0$ (ou en $x_0$), suivant $A$ si $f - g$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $x_0$ suivant $A$.*

**Notation.-** Si $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $x_0$ , on notera $f \sim g$. On ajoutera *au voisinage de $x_0$ suivant $A$* ou *en $x_0$ suivant $A$* en cas de confusion possible. La précision *suivant $A$* sera omise s'il n'y a pas d'ambiguité sur la partie $A$. On pourra également utiliser la notation suivante

$$f\,(x) \underset{x \to x_0}{\sim} (g\,(x)).$$

**Théorème 2.4.** *La relation ‹‹ $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $x_0$ suivant $A$ ›› est une relation d'équivalence sur les fonctions définies sur $A \cap I_0$.*

**Preuve.-** *Nous donnons ici une preuve complète de ce résultat. Cependant, il est plus facile de le voir comme un corollaire du théorème 2.5 ci-dessous.*
1. La relation est clairement *réflexive* : la fonction nulle est négligeable devant toute fonction.
2. *Symétrie.* On se donne $f$ et $g$ définies sur $A \cap I_0$ telles que $f \sim g$ en $x_0$. Soit $\eta > 0$. Il existe $\delta\,(\eta) > 0$ tel que

$$(\forall x \in I \cap A) \quad (|x - x_0| < \delta\,(\eta) \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \eta\,|g(x)|)\,.$$

De la majoration $|g(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |f(x)|$, il vient en remplacant dans l'expression ci-dessus, et en réordonnant

$$(\forall x \in I \cap A) \quad \Big(|x - x_0| < \delta\,(\eta) \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \tfrac{\eta}{1-\eta}\,|f(x)|\Big)\,.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Considérons $\eta = \varepsilon/(1+\varepsilon)$ (de sorte que $\varepsilon = \eta/(1-\eta)$). D'après le calcul précédent il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap A$ avec $|x - x_0| < \delta$, on a

$$|f(x) - g(x)| \leq \tfrac{\eta}{1-\eta}\,|f(x)| = \varepsilon\,|f(x)|\,.$$

D'où l'on déduit $g - f = \mathrm{o}(f)$ en $x_0$.

3. *Transitivité.* On se donne $f$ , $g$ et $h$ définies sur $A \cap I_0$ telles que $f \sim g$ et $g \sim h$ en $x_0$. Soit d'abord $\eta > 0$. De $f - g = \mathrm{o}(g)$ et $g - h = \mathrm{o}(h)$, on déduit l'existence de $\delta(\eta) > 0$ tel que tel que les deux propriétés suivantes soient vraies

$$\begin{array}{lcl} \forall x & \in & I \cap A, \quad (|x - x_0| < \delta(\eta) \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \eta\,|g(x)|) \\ \forall x & \in & I \cap A, \quad (|x - x_0| < \delta(\eta) \Rightarrow |g(x) - h(x)| \leq \eta\,|h(x)|) \end{array}$$

D'où, par l'inégalité triangulaire

$$\forall x \in I \cap A, \qquad (|x - x_0| < \delta(\eta) \Rightarrow |f(x) - h(x)| \leq \eta(|g(x)| + |h(x)|))\,.$$

En majorant $|g(x)|$ par $\eta\,|h(x)| + |h(x)|$, il vient

$$\forall x \in I \cap A, \qquad \left(|x - x_0| < \delta(\eta) \Rightarrow |f(x) - h(x)| \leq (\eta^2 + 2\eta)\,|h(x)|\right).$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 < \eta^2 + 2\eta \leq \varepsilon$, car $\lim_{\eta \to 0}(\eta^2 + 2\eta) = 0$. D'après le calcul précédent il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap A$ avec $|x - x_0| < \delta$, on a

$$|f(x) - h(x)| \leq (\eta^2 + 2\eta)\,|h(x)| \leq \varepsilon\,|h(x)|\,.$$

D'où $f \sim h$ en $x_0$.□

**Théorème 2.5.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles définies sur $A \cap I_0$. Sont équivalentes :*
*1. $f \sim g$ en $x_0$ ;*
*2. Il existe un intervalle $J \in \mathcal{V}_{x_0}$ et une fonction $\varphi$ définie sur $A \cap J$ telle que $f = (1+\varphi)g$ sur $A \cap J$ et $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \in A} \varphi(x) = 0$.*

**Preuve.-** Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition 2.2. On a en effet l'équivalence

$$f \underset{x \to x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow f - g = \underset{x \to x_0}{\mathrm{o}}(g).\square$$

On peut donc reformuler le théorème 2.5 en disant que (avec les mêmes notations)

$$f \underset{x \to x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow f = (1 + \underset{x \to x_0}{\mathrm{o}}(1))g.$$

Le théorème 2.4 peut être vu comme une conséquence quasi immédiate du théorème 2.5. En effet, considérons $f$ , $g$ et $h$ définies sur $A \cap I_0$ telles que $f \sim g$ et $g \sim h$ en $x_0$. Il existe un intervalle $J \in \mathcal{V}_{x_0}$ et une fonction $\varphi$ (*resp.* $\psi$) définie sur $A \cap J$ tels que $f = (1+\varphi)g$ (*resp.* $g = (1+\psi)h$) sur $A \cap J$ avec

$$\varphi = \underset{x \to x_0}{\mathrm{o}}(1) \quad (\textit{resp. } \psi = \underset{x \to x_0}{\mathrm{o}}(1)\,).$$

On a alors $g = f\,(1+\varphi)^{-1}$ sur un ensemble $A \cap J'$ où $J' \in \mathcal{V}_{x_0}$. De plus $(1+\varphi)^{-1} = \underset{x \to x_0}{\mathrm{o}}(1)$. Enfin

$$f = (1+\varphi)(1+\psi)h = (1 + \varphi + \psi + \varphi\psi)\,h,$$

avec $\varphi + \psi + \varphi\psi = \underset{x \to x_0}{\mathrm{o}}(1)$.

Donnons quelques corollaires du théorème 2.5.

**Corollaire 2.6.** *Soient $f_1$, $f_2$, $g_1$et $g_2$ quatre fonctions définies sur $A \cap I_0$ telles que $f_1 \sim g_1$en $x_0$ et $f_2 \sim g_2$ en $x_0$. On a $f_1\ f_2 \sim g_1 g_2$ en $x_0$.*

Sous les mêmes hypothèses il est en général faux que l'on ait $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 2.7.** *On prend* $x_0 = 0$, $f_1 = \sin x$, $f_2 = x^2 - \sin x$, $g_1 = x$, $g_2 = -x$. *On vérifie que* $f_1 \underset{x\to 0}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{x\to 0}{\sim} g_2$, *mais* $f_1 + f_2 = x^2$ *et* $g_1 + g_2 = 0$.

**Corollaire 2.7.** *Soient* $f$ *et* $g$ *deux fonctions à valeurs réelles définies sur* $A \cap I_0$, $g$ *ne s'annulant pas sur cet ensemble. Alors :*
*1. La fonction* $f$ *est équivalente à* $g$ *en* $x_0$ *suivant* $A$ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in A} f/g = 1$ ;
*2. On a l'équivalence*

$$f \underset{x\to x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow 1/f \underset{x\to x_0}{\sim} 1/g.$$

**Corollaire 2.8.** *Si* $f \sim g$ *au voisinage de* $x_0$ *suivant* $A$ *et si* $g$ *possède une limite pour* $x \to x_0$, *suivant* $A$ *alors* $f$ *possède la même limite pour* $x \to x_0$, *suivant* $A$.

**Corollaire 2.9.** *On suppose que* $f$ *et* $g$ *sont à valeurs réelles. Si* $f \sim g$ *au voisinage de* $x_0$ *selon* $A$ *alors il existe* $I \in \mathcal{V}_{x_0}$ *tel que sur* $I \cap A$ , $f$ *et* $g$ *ont même signe.*

**Proposition 2.10.** *Soient* $f$ *et* $g$ *deux fonctions à valeurs réelles définies sur* $A \cap I_0$ *telles que* $f \sim g$ *en* $x_0$ *suivant* $A$, $g$ *possédant une limite suivant* $A$ *strictement positive et différente de* $1$ *en* $x_0$. *Alors il existe un intervalle* $J \in \mathcal{V}_{x_0}$ *tel que* $\ln f$ *et* $\ln g$ *soient définies sur* $A \cap J$ *et l'on a* $\ln f \sim \ln g$ *en* $x_0$ *suivant* $A$.

**Remarque.-** La proposition précédente est encore vraie lorsque $g$ tend vers $+\infty$ en $x_0$.

En revanche l'hypothèse $f \sim g$ en $x_0$ n'entraine pas en général un résulat semblable sur l'exponentielle des fonctions $f$ et $g$, comme le montre le contre-exemple $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + x$ en $x_0 = +\infty$. On dispose cependant du résultat (immédiat) :

**Proposition 2.11.** *Soient* $f$ *et* $g$ *deux fonctions à valeurs réelles définies sur* $A \cap I_0$. *On a*

$$\exp f \sim \exp g, \quad \text{en } x_0 \text{ suivant } A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0,\, x\in A} (f-g)(x) = 0.$$

*i*. Supposons $\exp(f) \sim \exp(g)$. D'après le théorème **??** il existe un intervalle $J \in \mathcal{V}_{x_0}$ et une fonction $\theta$ définie sur $A \cap J$ telle que $\exp(f) = \theta \exp(g)$ sur $A \cap J$ et $\lim_{x\to x_0, x\in A} \theta(x) = 1$. L'égalité précédente entraine que la suite $\theta$ est à valeurs strictement positives. D'où

$$\forall x \in A \cap J, \quad f(x) = \ln(\theta(x)) + g(x).$$

avec $\lim_{x\to x_0, x\in A} \ln(\theta(x)) = 0$.
*ii*. Réciproquement, si $\lim_{x\to x_0, x\in A} (f(x) - g(x)) = 0$, on pose $h = f - g$ sur $A \cap J$. On a alors

$$\forall x \in A \cap J, \quad \exp(f(x)) = \exp(h(x)) \exp(g(x)),$$

avec $\lim_{x\to x_0, x\in A} \ln(h(x)) = 1$. D'où $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$.□

### 2.5. Comparaison et intégration

On considère dans ce seul paragraphe $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ voisinage d'un réel $x_0$, $f$ une application définie sur $I$ et à valeurs réelles ou complexes localement intégrable sur $I$, $g$ une application définie sur $I$ et à *valeurs réelles positives* localement intégrable sur $I$. On se propose de comparer au voisinage de $x_0$ les applications (définies sur $I$)

$$x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad x \longmapsto \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Proposition 2.12.** *On a les implications suivantes (*$k$ *désigne un scalaire) :*
*i.* $f = \underset{x\to x_0}{\mathrm{O}}(g) \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to x_0}{\mathrm{O}}(\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t)$ ;
*ii.* $f = \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(g) \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t)$ ;
*iii.* $f \underset{x\to x_0}{\sim} kg \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to x_0}{\sim} k\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Preuve.-** Avec les notations du texte, nous pouvons poser, pour tout $x \in I$,

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad G(x) = \left|\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Les propriétés *i.*, *ii.* et *iii.* reposent principalement sur la conservation des inégalités par l'intégrale. Supposons qu'il existe $\alpha$ un réel positif tels que $|f| \le \alpha g$. On a alors pour $x \ge x_0$

$$|F(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le \alpha \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\,|G(x)|\,.$$

De même si $x \le x_0$, on a

$$|F(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{x}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{x}^{x_0} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le \alpha \int_{x}^{x_0} g(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\,|G(x)|\,.$$

D'où

$$\forall x \in I, \quad |F(x)| \le \alpha\,|G(x)|\,. \tag{2.1}$$

*i.* Cela provient directement de la relation (2.1).
*ii.* Soit $\varepsilon > 0$. Comme par hypothèse $f = \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(g)$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad (|x - x_0| \le \eta \Rightarrow |f(x)| \le \varepsilon g(x))\,.$$

D'après la relation (2.1), on a, pour $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$,

$$|F(x)| \le \varepsilon\,|G(x)|\,.$$

Ainsi, on a bien $F(x) = \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(G(x))$.
Pour *iii.*, on revient à la définition de l'équivalence. On a

$$f \sim kg \Leftrightarrow f - kg = \mathrm{o}(kg) \Rightarrow F - kG = \mathrm{o}(kG) \Rightarrow F \sim kG,$$

l'implication centrale venant de *ii.* et de la linéarité de l'intégrale.□

## 3. Développements limités

Dans cette section les fonctions considérées seront à valeurs réelles ou complexe sans que cela soit reprécisé dans les énoncés, sauf dans le paragraphe.3.4 où les fonctions sont à variables réelles.

### 3.1. Définitions et premières propriétés

**Définition 4.** *Soit $f$ une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n$ un entier. On dit que $f$ possède un* développement limité *(en abrégé* D.L.*)* d'ordre $n$ en $x_0$ *s'il existe une fonction polynôme $F$ de degré au plus $n$ telle que*

$$f(x) = F(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n). \tag{3.1}$$

**Définition 5.** *Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). On dit que $f$ possède un* développement limité *(en abrégé* D.L.*)* d'ordre $n$ en $+\infty$ *(resp. $-\infty$) s'il existe une fonction polynôme $F$ de degré au plus $n$ telle que*

$$f(x) = F(\frac{1}{x}) + \mathrm{o}(\frac{1}{x^n}) \;\; \text{en} \;\; +\infty \quad (\text{resp..} \; -\infty). \tag{3.2}$$

**Proposition 3.1.** *Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. (resp. $+\infty$ ou $-\infty$) possédant un développement limité de partie principale $F(x - x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$. Alors*

$$a_0 = f(x_0) \;\; ; \quad \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}, \;\; a_k = \lim_{x\to x_0, x\ne x_0} \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i (x - x_0)^i}{(x - x_0)^k}.$$

Ceci est un résultat d'*unicité* du développement limité, lorsqu'il existe : la fonction polynôme $F$ est entiérement déterminée par les $(n+1)$ coefficients $(a_k)_{0\le k\le n}$. On dispose d'un résultat analogue lorsque $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$. On appellera donc la fonction polynôme $F$ vérifiant la relation (3.1) ou (3.2) lorsqu'elle existe, le *développement limité d'ordre $n$ de $f$ en $x_0$*.

**Proposition 3.2.** *Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et possédant en $x_0$ un développement limité $F$ d'ordre $n$. Alors pour tout entier $m \leq n$, $f$ possède un développement limité d'ordre $m$, obtenu en supprimant de $F$ tous les termes de degré strictement supérieur à $m$.*

**Remarque.-** Soit $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence (cf document *calcul différentiel I*) :
1. $f$ est dérivable en $x_0$ ;
2. $f$ possède un développement limité d'ordre 1 en $x_0$.

En revanche, $f$ peut posséder un développement limité d'ordre $n > 1$ et ne pas être deux fois dérivable en $x_0$, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 3.1.** *Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad f(x) = x^3 \sin(1/x) \;\; ; \;\; f(0) = 0.$$

On vérifie que $f$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (attention à la dérivabilité en 0), avec

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad f'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x) \; ; \; f'(0) = 0.$$

Le quotient $f'(x)/x$ n'admet pas de limite pour $x$ tendant vers 0 en raison du terme en $\cos(1/x)$. Ainsi $f$ n'est pas deux fois dérivable en 0. En revanche, comme on a $f(x) = \mathrm{o}(x^2)$ en 0 , $f$ admet la fonction polynôme nulle comme *D.L.* d'ordre 2 en 0.

### 3.2. Développements limités et formule de Taylor

On renvoie le lecteur au document *calcul différentiel II* pour l'étude des formules de Taylor.

**Proposition 3.3.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n$ fois dérivable au point $x_0$. La fonction $f$ possède un D.L. $F$ d'ordre $n$ en $x_0$. On a de plus*

$$F(x - x_0) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} (x - x_0)^k f^{(k)}(x_0)/k!$$

La **preuve** est immédiate puisque la formule de Taylor-Young donne précisement, avec les notations du théorème $f(x) = F(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$.

Avec les notations de la proposition 3.3, on remarque que si $f$ est développable en série entière en $x_0$ elle satisfait aux hypothèses pour tout entier $n$. On a donc :

**Proposition 3.4.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et développable en série entière en $x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f$ possède un D.L. d'ordre $n$ en $x_0$ donné par son développement en série entière, tronqué à l'ordre $n$.*

On peut en donner une **preuve** directe. Supposons que sur un intervalle $I$ voisinage de $x_0$ on ait

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} (x - x_0)^k a_k. \quad (\text{avec } (a_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad f(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} (x - x_0)^k a_k + (x - x_0)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (x - x_0)^k a_k, \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} (x - x_0)^k a_k + \mathrm{o}\left((x - x_0)^n\right). \end{aligned}$$

Les propositions 3.3 et 3.4 donnent la plupart des *D.L.* usuels (qu'il est bon de connaitre !).

**Exemples 3.2.** *Calcul du D.L. en 0 de $x \mapsto \exp x$, de $x \mapsto \ln(1 + x)$, de $x \mapsto \cos x$, , de $x \mapsto \sin x$ de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ à tout ordre.*

### 3.3. Opérations sur les développements limités

#### 3.3.1. Linéarité des développements limités

**Proposition 3.5.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f$ (resp. $g$) possède un développement limité en $x_0$ d'ordre $n$ noté $F$ (resp. $G$). Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet comme développement limité en $x_0$ d'ordre $n$ la fonction polynôme $\lambda F + \mu G$.*

**Preuve.-** On le fait pour $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = F(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \ ; \ g(x) = G(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n).$$

D'où, par la proposition 2.3, $[\lambda f + \mu g](x) = [\lambda F + \mu G](x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$.□

**Exemple 3.3.** *Calcul du D.L. en 0 de $x \mapsto \operatorname{sh} x$ et de $x \mapsto \operatorname{ch} x$ à tout ordre. (On peut aussi les obtenir par la proposition 3.4.)*

#### 3.3.2. Produit de développements limités

**Proposition 3.6.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f$ (resp. $g$) possède un développement limité en $x_0$ d'ordre $n$ noté $F$ (resp. $G$). Alors la fonction $fg$ admet comme développement limité en $x_0$ d'ordre $n$ la fonction polynôme $FG$ tronquée de ses termes de degré strictement supérieur à $n$.*

Une autre manière de le dire est que le développement limité de $fg$ est obtenu en effectuant la division euclidienne du produit de $FG$ par $X^{n+1}$.
**Preuve.**de la proposition 3.6.- On le fait pour $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = F(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \ ; \ g(x) = G(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n).$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (F(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n))\,(g(x) = G(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n))\,, \\ &= F(x - x_0)G(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n), \end{aligned}$$

car les fonctions $x \mapsto F(x - x_0)$ et $x \mapsto G(x - x_0)$ sont bornées au voisinage de $x_0$/
On effectue la division euclidienne de la fonction polynôme $FG$ par $X^{n+1}$. Il existe un couple de polynômes $(S, R)$ tel que $FG = S + X^{n+1}R$ avec $\deg S \leq n$. D'où

$$FG(x - x_0) = S(x - x_0) + (x - x_0)^{n+1}R(x - x_0)$$

Il vient donc

$$FG(x - x_0) = S(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n).$$

Puis $f(x)g(x) = S(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$.□

**Exemple 3.4.** *Calcul du D.L. en 0 de $x \mapsto (\exp x)\,/\sqrt{1 + x}$ à l'ordre 6.*

#### 3.3.3. Quotient de développements limités

**Proposition 3.7.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de 0. On suppose que $f$ (resp. $g$) possède un développement limité en 0 d'ordre $n$ noté $F$ (resp. $G$). Si de plus $G(0) \neq 0$, alors la fonction $f/g$ est définie au voisinage de 0 et admet comme développement limité en 0 d'ordre $n$ la fonction polynôme $Q$ associée au quotient $Q(X)$ de la division par rapport aux puissances croissantes, à l'ordre $n$, de $F(X)$ par $G(X)$.*

**Preuve.-** D'après le théorème de division selon les puissances croissantes, il existe un unique couple de polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ tels que

$$F(X) = G(X)Q(X) + X^{n+1}R(X), \quad \text{avec } \deg Q(X) \leq n.$$

Comme $G(0) \neq 0$, la fonction continue $x \mapsto [F/G](x)$ est définie au voisinage de 0 et vérifie

$$[F/G](x) = Q(x) + x^{n+1}R(x)/Q(x).$$

Comme $R(x)/Q(x) = \mathrm{O}(1)$ en 0, $Q(x)$ est le *D.L.* d'ordre $n$ en 0 de $x \mapsto [F/G](x)$.
De $\lim_{x\mapsto 0} g(x) = \lim_{x\mapsto 0} G(x) \neq 0$, (cette limite est le terme de degré 0 de $G$), on déduit que la fonction $x \mapsto [f/g](x)$ est définie au voisinage de 0 et vérifie

$$[f/g](x) - [F/G](x) = (G(x)[F(x) + \mathrm{o}(x^n)] - F(x)[G(x) + \mathrm{o}(x^n)]) \,/\, (g(x)G(x)) \,.$$

Comme $\lim_{x\mapsto 0} g(x)G(x) \neq 0$, il vient $[f/g](x) - [F/G](x) = \mathrm{o}(x^n)$ et le résultat.□

**Exemple 3.5.** *Calcul du D.L. en* 0 *de* $x \mapsto \tan x$ *à l'ordre* 5.

### 3.3.4. Dérivation et intégration de développements limités

**Proposition 3.8.** *Soit $f$ une fonction définie et intégrable sur un intervalle compact contenant* 0*, voisinage de* 0*. On suppose que $f$ possède un développement limité en* 0 *d'ordre $n$ noté $F$ Alors la fonction $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, définie au voisinage de* 0*, admet comme développement limité en* 0 *d'ordre $n+1$ la fonction polynôme $x \mapsto \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$.*

**Preuve.-** Par hypothèse la fonction $f$ est définie et intégrable sur un intervalle compact, voisinage de 0. On peut le prendre de la forme $[-a, a]$ ($a \in ]0, +\infty[$). Ecrivons

$$\forall x \in [-a, a]\,, \quad f(x) = F(x) + x^n \varepsilon(x), \ \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Comme la fonction $\varepsilon(x)$ s'écrit, pour $x \neq 0$, $\varepsilon(x) = (f(x) - F(x))/x^n$ et qu'elle se prolonge par continuité en 0, elle est intégrable sur $[-a, a]$. On a alors

$$g(x) = \textstyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrons que la fonction $\varphi(x) = \int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$ s'écrit $\varphi(x) = \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$.
Soit $\delta > 0$. Comme $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [-a, a]\,, \quad (|x| < \eta \Rightarrow |\varepsilon(t)| < \delta)\,.$$

On a alors, pour tout $x \in [-a, a]$, vérifiant $|x| < \eta$

$$|\varphi(x)| \leq \left|\textstyle\int_0^x |t|^n \, |\varepsilon(t)| \,\mathrm{d}t\right| \leq \delta \underline{\left|\textstyle\int_0^x |t|^n \,\mathrm{d}t\right|} \leq \delta \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \delta \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \delta\, |x|^{n+1}\,.$$

(Le lecteur est invité à vérifier soigneusement la majoration de l'intégrale soulignée, en séparant les cas $x > 0$ et $x < 0$.)
On a donc

$$(\forall \delta > 0) \ \ (\exists \eta > 0) \ \ (\forall x \in [-a, a]) \ \ \left(|x| < \eta \Rightarrow |\varphi(x)| \leq \delta\, |x|^{n+1}\right).$$

Soit exactement : $\varphi(x) = \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$.□

**Exemple 3.6.** *Calcul du D.L. en* 0 *de* $x \mapsto \arcsin x$*,* $x \mapsto \arccos x$*,* $x \mapsto \arctan x$ *(ordre quelconque).*

On déduit de la proposition 3.8 le résultat suivant :

**Proposition 3.9.** *Soit $f$ une fonction définie au voisinage de* 0*, de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur un voisinage de* 0*. Si $f$ et $f'$ posssèdent des D.L. en* 0 *(respectivement à l'odre $n$ et $n-1$) alors le D.L. de $f'$ et la dérivée du D.L. de $f$.*

L'hypothèse faite sur $f$ (être de classe $\mathrm{C}^1$) assure l'intégrabilité de $f'$.

**Remarque.-** Il faut se garder de penser que lorsque $f$ possède un développement limité d'ordre $n$ supérieur ou égal à 1 en un point sa dérivée en possède également un d'ordre $n-1$. Ceci est lié au fait que posséder un développement limité n'est équivalent à être dérivable que pour l'ordre 1.

**Exemple 3.7.** *On s'inspire de l'exemple 3.1. Soit* $(f_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *la famille d'application définies sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad f_{p,q}(x) = x^p \sin(x^{-q}) \ \ ; \ \ f(0) = 0.$$

On vérifie que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad f'_{p,q}(x) = px^{p-1}\sin\left(x^{-q}\right) - qx^{p-q-1}\cos\left(x^{-q}\right).$$

Si $p$ est supérieur ou égal à 2 la fonction $f$ est dérivable en 0 avec $f'_{p,q}(0) = 0$, car alors $f_{p,q}(x) = x\mathrm{o}\,(x)$. De manière plus générale, on a $f_{p,q}(x) = x^{p-1}\mathrm{o}\,(1)$. Ainsi $f_{p,q}$ admet comme développement limité à l'ordre $p-1$ la fonction polynôme nulle.
En revanche, l'expression de $f'_{p,q}$ montre que si $q \geq p-1$, la fonction $f'_{p,q}(x)$ ne possède pas de limite en 0, et donc a fortiori de développement limité. La relation $f'_{p,q} = x^{p-q-2}\mathrm{o}\,(1)$ permet l'étude pour les valeurs de $q$ inférieures ou égales à $p-2$. Cette famille d'exemples montre que ‹‹ toutes les situations sont possibles ››.

### 3.3.5. Composition de développements limités

**Proposition 3.10.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de 0. On suppose que $f$ (resp. $g$) possède un développement limité en 0 d'ordre $n$ noté $F$ (resp. $G$). On suppose de plus que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Alors la fonction $g\,\mathrm{o}f$ est définie au voisinage de 0 et admet comme développement limité en 0 d'ordre $n$ la fonction polynôme $Q\mathrm{o}P$ tronquée de ces termes de degré strictement supérieur à $n$.*

**Preuve.-** Soit $J \in \mathcal{V}_0$ sur lequel $g$ est définie. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, il existe $I \in \mathcal{V}_0$ tel que $f(I) \subset J$. Ainsi $g \circ f$ est définie sur $I$. Comme $f(0) = 0$, le terme constant du développement limité de $f$ est nul. Ecrivons

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & P(x) + x^n\varepsilon(x), \quad \text{avec } P(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k \text{ et } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0, \\ g(y) & = & \sum_{k=0}^n b_k y^k + y^n\eta(y), \quad \text{avec } \lim\limits_{y\to 0}\eta(y) = 0. \end{array}$$

Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, on a $\lim_{x\to 0} \tilde{\varepsilon}\circ f(x) = 0$. D'où

$$g\circ f(x) = \sum_{k=0}^n b_k\left(P(x) + x^n\varepsilon(x)\right)^k + \left(P(x) + x^n\varepsilon(x)\right)^n\tilde{\eta}\,(x)\,, \tag{3.3}$$

avec $\tilde{\eta} = \eta\circ f$ et $\lim_{x\to 0}\tilde{\eta}(x) = 0$.
Pour les termes dans le signe somme, on remarque que

$$\left(P(x) + x^n\varepsilon(x)\right)^k = \left(P(x)\right)^k + \mathrm{o}(x^n),$$

pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$. (On peut par exemple développer le premier membre à l'aide de la formule du binôme de Newton.)
Notons que l'on a $P(x) = x^n a_1 + \mathrm{o}(x^n)$. D'où

$$\left(P(x) + x^n\varepsilon(x)\right)^n\tilde{\eta}\,(x) = \left(x^n a_1 + \mathrm{o}(x^n)\right)\tilde{\eta}\,(x) = \mathrm{o}(x^n).$$

En reportant ces résultats intermédiaires dans l'égalité (3.3) il vient

$$g\circ f(x) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k\left(\left(P(x)\right)^k + \mathrm{o}(x^n)\right) + \mathrm{o}(x^n) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k\left(P(x)\right)^k + \mathrm{o}(x^n).$$

En effectuant la division euclidienne du polynôme $\sum_{k=0}^n b_k\left(P(x)\right)^k$ par $x^{n+1}$ on dispose d'un couple $(Q,R)$ de polynômes tel que

$$\sum_{k=1}^n b_k\left(P(x)\right)^k = R(x) + x^{n+1}Q(x) \quad \text{avec } \deg R \leq n.$$

D'où enfin $g\circ f(x) = R(x) + \mathrm{o}(x^n)$.

**Exemples 3.8.**
*1. Calcul du D.L. en 0 de $x \mapsto \mathrm{sh}(\ln(1+x))$.*
*2. Calcul du D.L en 0 de $h : x \mapsto 1/\cos x$. (il est commode d'écrire $h = g\circ f$ avec $g(u) = 1/(1-u)$ et $f(x) = 1-\cos x$.*

**3.4. Application : position d'une courbe par rapport à une tangente**

Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle $I$ voisinage d'un point $x_0$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On suppose que $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ ($n \geq 2$) au point $x_0$ :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \sum_{k=2}^{n}(x - x_0)^k b_k + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

où les $b_k$ ($2 \leq k \leq n$) sont des réels et où la fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ est définie sur $I$ tend vers 0, pour $x$ tendant vers $x_0$.
On suppose de plus que les termes $b_k$, pour $2 \leq k \leq n$ sont *non tous nuls*. On pose alors

$$K = \min\{k \text{ tel que } b_k \neq 0,\ 2 \leq k \leq n\}$$

On dispose du :

**Théorème 3.11.**
*1. Si $K$ est pair et $b_K$ positif (resp. négatif), il existe un intervalle $J$ voisinage du point $x_0$ tel que sur ce voisinage $J$ la courbe $\mathcal{C}$ soit au dessus (resp. au dessous) de sa tangente au point $x_0$.*
*2. Si $K$ est impair la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente au point $x_0$.*
*Plus précisément, il existe un intervalle $J$ voisinage du point $x_0$ tel que lorsque $b_K$ est positif (resp. négatif), sur $]-\infty, a] \cap J$ la courbe $\mathcal{C}$ est au dessous (resp. au dessus) de sa tangente et sur $J \cap [a, +\infty[$ la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus (resp. au dessous)de sa tangente.*

**Preuve.-** Avec les hypothèses on peut écrire

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^K (b_K + \varepsilon(x))$$

où la fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ est définie sur $I$ et tend vers 0.
Si $M(x)$ désigne le point de coordonnées $(x, f(x))$ et $M_T(x)$ le point d'abscisse $x$ de la tangente à $\mathcal{C}$ au en $x_0$ on a alors $\overline{M_T(x)M(x)} = f(x) - f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = (x - x_0)^K (b_K + \varepsilon(x))$.
Comme $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, il existe un intervalle $J$ inclus dans $I$ tel que

$$\forall x \in J, \quad |\varepsilon(x)| < |b_K|.$$

Alors pour tout $x \in J$, $\overline{M_T(x)M(x)}$ est du signe de $(x - x_0)^K b_K$. Le théorème en résulte immédiatement.□




**PLC1-Mathématiques**
**Auteur : A. Delcroix**

# CALCUL DIFFERENTIEL I
Premières propriétés

## 1. Introduction

Dans ce document, on présente la notion de nombre dérivée au travers des développements limités d'ordre 1. On sait qu'il y a équivalence pour une fonction entre posséder en un point un développement limité d'ordre 1 et un nombre dérivé[1]. Par ailleurs, ceci est également proche de la présentation de la notion de différentielle pour les fonctions de plusieurs variables.

Ce choix peut être discuté, notamment dans le cadre d'une leçon d'oral 1 du CAPES où la contrainte du temps peut conduire à abréger. Dans ce cas la proposition-définition 2 peut servir de point de départ.

Le document se poursuit par une étude rapide des fonctions dérivables, de classe $C^p$ ($p$ entier supérieur ou égal à 1). Les grands résultats sont reportés dans un document ultérieur (calcul différentiel II). Cependant, deux résultats utilisés dans le cours du document (le théorème des accroissement finis et un théorème de Darboux) sont énoncés et démontrés en annexe.

## 2. Développements limités d'ordre 1 et nombre dérivé

### 2.1. Définitions et premières propriétés

#### 2.1.1. Développement limité d'ordre 1

Dans tout ce paragraphe $x_0$ désignera un nombre réel fixé, $I$ un intervalle d'intérieur non vide contenant $x_0$ en son intérieur et $f$ une fonction définie sur $I$ sauf éventuellement au point $x_0$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Définition 1.** *On dit que $f$ possède un développement limité (*en abrégé *un D.L.) d'ordre* 1 *en $x_0$ s'il existe deux réels $a_0$ et $a_1$ et une fonction $\varepsilon$ définie sur un intervalle $J \subset I$ voisinage de $x_0$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ tels que*

$$\text{1. } \forall x \in J\backslash\{x_0\},\ \ f(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)\varepsilon(x)\ ; \quad \text{2. } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0. \tag{2.1}$$

**Remarque**.– On écrit souvent la définition 1 sous la forme équivalente suivante faisant apparaitre un accroissement : $f$ possède un D.L. d'ordre 1 en $x_0$ s'il existe deux réels $a_0$ et $a_1$ et une fonction $\varepsilon$ définie sur un intervalle $W$ voisinage de 0 à valeurs dans $\mathbb{K}$ tels que

$$\text{1. } \forall h \in W,\ \ f(x + h) = a_0 + ha_1 + h\varepsilon(h)\ ; \quad \text{2. } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0. \tag{2.2}$$

**Proposition 2.1.** *Si la fonction $f$ possède un développement limité d'ordre* 1 *en $x_0$, noté comme dans la définition 1, on a nécessairement*

$$a_0 = \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x)\ ; \quad a_1 = \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} (f(x) - f(x_0))/(x - x_0).$$

**Preuve**.– On suppose que $f$ possède un D.L. d'ordre 1 en $x_0$. En faisant tendre $x$ vers $x_0$ dans l'égalité (2.1) il vient $a_0 = \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x)$.
Puis, pour $x \in J\backslash\{x_0\}$, il vient $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) = a_1 + \varepsilon(x)$. Comme $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, la conclusion est immédiate.□

Ce résultat est un résultat d'*unicité* du développement limité d'ordre 1, lorsqu'il existe : on appelera dans ce cas la fonction $x \mapsto a_0 + (x - x_0)a_1$ *la partie principale du développement limité de $f$ en $x_0$*. Le développement limité est constitué de l'ensemble de l'expression

$$a_0 + ha_1 + h\varepsilon(h).$$

Voici une première propriété, conséquence immédiate de la proposition 2.1 :

[1] C'est faux pour les ordres supérieurs : une fonction peut posséder un développement limité d'ordre strictement supérieur à 1, tout en étant uniquement dérivable à l'ordre 1.

**Proposition 2.2.** *Si la fonction $f$ possède un développement limité d'ordre* 1 *en $x_0$ alors $f$ est prolongeable par continuité en $x_0$, en posant $f(x_0) = a_0$.*

**Remarque**.– Dans la suite nous supposerons donc la fonction définie au point $x_0$ et continue en ce point.

#### 2.1.2. Propriétés algébriques des développements limités d'ordre 1

Nous traitons de cette question dans la proposition 2.6 ci dessous.

#### 2.1.3. Nombre dérivé

Dans tout ce paragraphe $x_0$ désigne un nombre réel fixé, $I$ un intervalle d'intérieur non vide contenant $x_0$ en son intérieur et $f$ une fonction définie sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

**Proposition-Définition 2.** *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
*i. la fonction $f$ possède un développement limité d'ordre* 1 *en $x_0$ ;*
*ii. le quotient $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ possède une limite pour $x$ tendant vers $x_0$ par valeurs différentes de $x_0$.*
*Si l'une des deux assertions précédentes est vraie, on dit que $f$ est* dérivable *en $x_0$ et la limite du quotient $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ s'appelle le* nombre dérivé *de $f$ en $x_0$. On le notera $f'(x_0)$.*

**Preuve**.– L'implication $[i \Rightarrow ii]$ a été vue dans la proposition 2.1. Supposons donc *ii.* vraie et posons $l = \lim_{x \to x_0, x \neq x_0}(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$. Définissons une fonction $\varepsilon$ sur $I$ par

$$\varepsilon(x_0) = 0 \ ; \quad \forall x \in \setminus\{x_0\}, \ \ \varepsilon(x_0) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) - l.$$

On a alors, pour tout $x \in I$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)l + (x - x_0)\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.\square$

**Remarque**.– Comme indiqué dans l'introduction, dans un exposé d'oral 1 on peut se servir de la proposition-définition 2 comme point de départ et supposer, pour simplifier, que $f$ est définie en $x_0$.

### 2.2. Interprétations du nombre dérivé

#### 2.2.1. Interprétation géométrique

Dans ce paragraphe $x_0$ désigne un nombre réel fixé, $I$ un intervalle d'intérieur non vide contenant $x_0$ en son intérieur, $f$ une fonction définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$. On notera $M_0$ le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $M_x$ le point de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x$ appartenant à $I$.

**Définition 3.** *Si pour $x$ tendant vers $x_0$, la droite $M_0M_x$ possède une position limite, cette position limite s'appelle* tangente à $\mathcal{C}$ au point $M_0$.

**Proposition 2.3.** *Si la fonction $f$ possède un développement limité d'ordre* 1 *en $x_0$, la courbe $\mathcal{C}$ possède une tangente en $M_0$ d'équation*

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

**Preuve**.– Le coefficient directeur de la droite $M_0M_x$ s'écrit $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$. Pour $x$ tendant vers $x_0$, ce quotient tend vers $f'(x_0)$.$\square$

#### 2.2.2. Interprétation numérique : notion d'approximation affine

Dans tout ce paragraphe $x_0$ désignera un nombre réel fixé, $I$ un intervalle d'intérieur non vide contenant $x_0$ en son intérieur et $f$ une fonction numérique définie sur $I$.

**Définition 4.** *On appelle approximation affine de $f$ au point $x_0$ toute fonction $g$ affine s'écrivant*

$$g(x) = f(x_0) + (x - x_0)l, \tag{2.3}$$

*où $l$ est un nombre réel.*

**Proposition 2.4.** *Si la fonction $f$ est dérivable en $x_0$ alors la partie principale du développement limité de $f$ est la meilleure approximation affine de $f$ au point $x_0$, au sens suivant : pour toute approximation affine $g$, il existe un voisinage $V$ de $x_0$, tel que*

$$\forall x \in V, \quad |f(x) - g(x)| \geq |f(x) - (f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0))| \,.$$

**Preuve**.– Suppposons $f$ dérivable en $x_0$. La partie principale du développement limité est une approximation affine de $f$, puisque sur un voisinage de $x_0$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad (\text{avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0\,). \tag{2.4}$$

On suppose qu'il existe $g(x) = f(x_0)+(x-x_0)l$ une approximation affine de $f$ meilleure que le développement limité, *id est*

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - (f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0))| \,.$$

En remplacant $f$ par l'expression (2.4) et $g$ par l'expression (2.3) il vient

$$|(x - x_0)(f'(x_0) - l) + (x - x_0)\varepsilon(x)| \leq |(x - x_0)\varepsilon(x)| \,.$$

D'où, pour $x \neq x_0$, $|f'(x_0) - l + \varepsilon(x)| \leq |\varepsilon(x)|$ puis $|f'(x_0) - l| \leq 2\,|\varepsilon(x)|$.
D'où nécessairement $l = f'(x_0)$.□

### 2.3. Complément : nombre dérivé à droite, à gauche

Dans ce paragraphe, $I$ désignera un intervalle d'intérieur non vide et $f$ une fonction définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

**Définition 5.** *Soit $x_0$ un point de $I$ tel qu'il existe un intervalle $J$, voisinage à droite de $x_0$ inclus dans $J$. On dit que $f$ possède un* nombre dérivé à droite *en $x_0$ ou encore que $f$ est* dérivable à droite *en $x_0$ si le quotient $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ possède une limite pour $x$ tendant vers $x_0$ par valeurs strictement supérieures à $x_0$. On notera ce nombre $f'(x_0^+)$.*

**Remarque**.– Il est équivalent de dire que $f$ possède un développement limité d'ordre 1 *à droite* en $x_0$ c'est-à-dire qu'il existe un nombre $a_1$ et une fonction $\varepsilon$ définie sur un intervalle $J$, voisinage à droite de $x_0$ inclus dans $J$ tels que

$$\forall x \in J, \qquad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

On laisse au lecteur le soin d'écrire les définitions analogues pour la notion de *nombre dérivé à gauche en $x_0$* (ou encore de *dérivée à gauche*), que l'on notera $f'(x_0^-)$.Plus briévement, on parlera de dérivée à droite et de dérivée à gauche. Enfin, le lecteur pourra écrire la définition de demi-tangente à droite, ou à gauche.

**Exemple 1.** *On considère la fonction $x \mapsto |x|$, définie sur $\mathbb{R}$. Elle est non dérivable à l'origine, mais admet en ce point une dérivée à gauche et une dérivée à droite distinctes.*

On a la proposition suivante dont la preuve est immédiate au vu des définitions.

**Proposition 2.5.** *Soit $x_0$ un point intérieur de $I$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
*1. La fonction $f$ est dérivable en $x_0$ ;*
*2. La fonction $f$ est dérivable à gauche et à droite en $x_0$ et ses dérivées à droite et à gauche sont égales.*

### 2.4. Propriétés algébriques

**Proposition 2.6.** *Soit $I$ un intervalle d'intérieur non vide, $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $x_0$ un point de l'intérieur de $I$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On suppose les deux fonctions $f$ et $g$ dérivables en $x_0$. Alors :*
*1. la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en $x_0$ avec*

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0) \;;$$

*2. la fonction $fg$ est dérivable en $x_0$ avec*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

*3. Si de plus la fonction $g$ ne s'annule pas sur un $I$ la fonction $1/g$, qui est définie sur $I$, est dérivable en $x_0$ avec*

$$(1/g)'(x_0) = -g'(x_0)/g^2(x_0).$$

**Remarques**.
*i.* On a des conclusions analogues pour le cas ou $f$ et $g$ sont toutes deux dérivables à gauche (*resp.* à droite) au point $x_0$ qui peut être alors, le cas échéant, une borne convenable de l'intervalle $I$.

*ii.* Dans le point 3, on peut simplement supposer que $g'(x_0)$ est non nul. Comme $g$ est continue, elle ne s'annule pas sur un voisinage $W$ de $x_0$. La fonction $1/g$ définie sur $W$ est alors dérivable en $x_0$. De même les points 2 et 3 de la proposition 2.6 entrainent la proposition suivante.

**Proposition 2.7.** *Avec les hypothèses de la proposition 2.6, si la fonction $g$ ne s'annule pas en $x_0$, la fonction $f/g$ est définie sur un voisinage de $x_0$ et dérivable en $x_0$ avec*

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

La proposition 2.6 est équivalente à la suivante. (On peut omettre cette proposition dans le cadre d'un oral ou simplement mentionner son existence.)

**Proposition 2.8.** *Soit $I$ un intervalle d'intérieur non vide, $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $x_0$ un point de l'intérieur de $I$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On suppose que la fonction $f$ (*resp.* $g$) admet un D.L. d'ordre 1 en $x_0$ égal à $x \mapsto a_0(f) + a_1(f)\,(x - x_0)$ (*resp.* $x \mapsto a_0(g) + a_1(g)\,(x - x_0)$). Alors :*
*1. la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un D.L. d'ordre 1 en $x_0$ égal à*

$$x \mapsto \lambda\,(a_0(f) + a_0(g)) + \mu\,(a_1(f) + a_1(g))\,(x - x_0)$$

*2. la fonction $fg$ admet un D.L. d'ordre 1 en $x_0$ égal à*

$$(fg)'(x_0) = a_0(f)a_0(g) + (a_1(f)a_0(g) + a_0(f)a_1(g))\,(x - x_0)\,.$$

*3. Si de plus la fonction $g$ ne s'annule pas sur $I$, la fonction $1/g$, qui est définie sur $I$, admet un D.L. d'ordre 1 en $x_0$ égal à*

$$(1/g)'(x_0) = 1/a_0(g) - \left(a_1(g)/\,(a_0(g))^2\right)(x - x_0)\,.$$

**Preuve de la proposition 2.6**.- La démonstration du 1., liée à la structure vectorielle, se fait de manière aussi simple par l'approche ‹‹ développement limité d'ordre 1›› que par celle ‹‹nombre dérivé››. En revanche, les démonstrations des propriétés liées à la structure multiplicative (points 2. et 3.) semblent plus faciles à mettre en oeuvre par l'approche nombre dérivé. Quoiqu'il en soit, le candidat à un concours doit présenter l'approche qu'il ‹‹sent›› le mieux et savoir retrouver l'autre approche.

**Preuve du 1**.
*Première approche :* développement limité d'ordre 1.- Par hypothèse il existe un intervalle $W$, voisinage de 0, deux fonctions $\varepsilon$ et $\eta$ telles que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$ et, pour tout $h \in W$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h(a_1 + \varepsilon(h)) \qquad g(x_0 + h) - g(x_0) = h(b_1 + \eta(h)),$$

où l'on a posé $a_1 = f'(x_0)$ et $b_1 = g'(x_0)$.
En posant $\varphi := \lambda f + \mu g$, il vient Avec les notation de l'énoncé, on a

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\,(\lambda a_1 + \mu b_1) + h\,(\lambda\varepsilon(h) + \mu\eta(h))\,.$$

Comme $\lim_{h\to 0} (\lambda\varepsilon(h) + \mu\eta(h)) = 0$, $\lambda a_1 + \mu b_1$ est bien le nombre dérivé de $\varphi = \lambda f + \mu g$ en $x_0$.□
*Deuxième approche :* nombre dérivé.- On a, pour tout $h$ assez petit différent de 0, et avec les mêmes notations

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lambda\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{a(x)} + \mu\underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{b(x)}.$$

Comme $f$ (*resp.* $g$) est dérivable en $x_0$ on a $\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} a(x) = f'(x_0)$ (*resp.* $\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} b(x) = g'(x_0)$). D'où

$$\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).\square$$

**Preuve du 2**.
*Première approche*.- On va vérifier que la fonction $fg$ possède un développement limité d'ordre 1 en $x_0$.

Avec les notations ci-dessus, il existe un intervalle $W$ voisinage de 0, deux fonctions $\varepsilon$ et $\eta$ telles que $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=\lim_{h\to 0}\eta(h)=0$ et, pour tout $x\in J$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h(a_1+\varepsilon(h)) \qquad g(x_0+h)-g(x_0)=h(b_1+\eta(h)),$$

où l'on a posé $a_1=f'(x_0)$ et $b_1=g'(x_0)$. On a

$$f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)=(f(x_0+h)-f(x_0))g(x)+(g(x_0+h)-g(x_0))f(x_0).$$

Or, d'une part

$$\begin{aligned}(f(x_0+h)-f(x_0))g(x)&=h(a_1+\varepsilon(h))g(x_0+h),\\ &=ha_1g(x_0)+h\left(\underline{\varepsilon(h)g(x_0+h)+a_1(g(x_0+h)-g(x_0))}\right).\end{aligned}$$

Comme $g$ est continue en $x_0$ (donc en particulier bornée au voisinage de $x_0$) la quantité soulignée tend vers 0 pour $h$ tendant vers 0.
D'autre part

$$(g(x_0+h)-g(x_0))f(x_0)=hb_1f(x_0)+h\eta(h)f(x_0).$$

la quantité $h\eta(h)f(x_0)$ tendant vers 0 pour $h$ tendant vers 0. Finalement, il vient

$$f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)=h(a_1f(x_0)+b_1f(x_0))+h\delta(h).$$

avec $\lim_{h\to 0}\delta(h)=0.\square$
*Deuxième approche.*- On va vérifer que la fonction $fg$ possède un nombre dérivé en $x_0$. On a, pour tout $x\in I$, $x\neq x_0$

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{a(x)}g(x)+\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{b(x)}f(x_0).$$

Comme $g$ possède un nombre dérivée en $x_0$ on a $\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$ (continuité de $g$) et

$$\lim_{x\to x_0,x\neq x_0}b(x)=g'(x_0).$$

Comme $f$ possède un nombre dérivée en en $x_0$, on a $\lim_{x\to x_0,x\neq x_0}a(x)=f'(x_0)$ d'où

$$\lim_{x\to x_0,x\neq x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\square$$

**Preuve du 3**.– On le fait avec l'approche "nombre dérivé". Avec les notations et hypothèsees de l'énoncé, on a pour tout $x\in I$, $x\neq x_0$,

$$\frac{(1/g)(x)-(1/g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}.$$

Comme $g$ possède un nombre dérivée en $x_0$ on a $\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$ (continuité de $g$) et

$$\lim_{x\to x_0,x\neq x_0}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}=-g'(x_0).$$

D'où

$$\lim_{x\to x_0,x\neq x_0}\frac{(1/g)(x)-(1/g)(x_0)}{x-x_0}=-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.\square$$

## 3. Fonctions dérivables

### 3.1. Définitions et première propriété.

**Définition 6.** *Soit $I$ un intervalle ouvert et $f:I\to\mathbb{K}$ une fonction. Si $f$ est dérivable en tout point de $I$, on dit que $f$ est* dérivable sur $I$. *et on appelera* fonction dérivée *ou plus simplement* dérivée *de $f$ la fonction*

$$I\to\mathbb{K},\quad x\mapsto f'(x).$$

*On notera cette fonction $f'$.*

**Définition 7.** *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé d'intérieur non vide et $f$ une fonction numérique définie sur $I$. Si $f$ est dérivable en tout point de l'intérieur de $I$, dérivable à droite en $a$ et à gauche en $b$, on dit que $f$ est dérivable sur $I$.*
*On définit alors la dérivée de $f$ comme étant la fonction $g$ définie sur $I$ par*

$$g(a) = f'(a^+)\ ; \quad g(b) = f'(b^-)\ ; \quad \forall x \in ]a, b[,\ \ g(x) = f'(x).$$

On la note encore $f'$, avec une ambiguïté de notation aux points $a$ et $b$. On laisse au lecteur le soin de poser des définitions analogues pour le cas de fonctions définies sur des intervalles semi-ouverts. On dispose de la proposition suivante conséquence de la proposition 2.2.

**Proposition 3.1.** *Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. Si $f$ est dérivable sur $I$, $f$ est continue sur $I$.*

### 3.2. Propriétés algébriques

La proposition 2.6 entraine :

**Proposition 3.2.** *Soit $I$ un intervalle d'intérieur non vide, $f$ et $g$ deux fonctions éfinies et dérivables sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a alors :*
*1. la fonction $\lambda f + \mu g$, définie sur $I$, est dérivable sur $I$ de fonction dérivée*

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'\ ;$$

*2. la fonction $fg$, définie sur $I$, est dérivable sur $I$, de fonction dérivée*

$$(fg)' = f'g + fg'\ ;$$

*3. si de plus la fonction $g$ ne s'annule pas sur $I$, la fonction $f/g$ est définie sur $I$ et dérivable, de fonction dérivée*

$$(f/g)' = (f'g - fg')\,/g^2.$$

**Exemple 2.** *La proposition 3.2 permet de montrer que toute fonction polynôme est dérivable en tout point. Toute fraction rationnelle est également dérivable en tout point où elle est définie, c'est-à-dire où son dénominateur ne s'annule pas.*

### 3.3. Dérivation des fonctions composées et des fonctions réciproques

#### 3.3.1. Dérivée d'une fonction composée

**Théorème 3.3.** *Soit $I$ et $J$ des intervalles ouverts, $f$ une fonction numérique définie et dérivable sur $I$, vérifiant $f(I) \subset J$ et $g$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie et dérivable sur $J$. L'application composée $g \circ f$, définie sur $I$, est dérivable sur $I$, de dérivée*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f).f'.$$

**Preuve**.- Soit $x_0$ un point de $I$. Montrons que $g \circ f$ possède un développement limité d'ordre 1 en $x_0$. Posons $y_0 = f(x_0)$. Il existe un intervalle $W$ intervalle voisinage de 0 et une fonction $\eta$ telle que l'on ait

$$1.\ \forall k \in W,\ \ g(y_0 + k) = g(y_0) + kg'(y_0) + k\eta(k)\ ; \quad 2.\ \lim_{k\to 0} \eta(k) = 0.$$

De même, il existe $V$ intervalle voisinage de 0 et une fonction $\varepsilon$ telle que l'on ait

$$1.\ \forall h \in V,\ \ f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)\ ; \quad 2.\ \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On étudie la fonction $h \to g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0)$, définie sur un voisinage de 0 qui contient $V$. On a, pour tout $h \in V$,

$$(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) = g\left(f(x_0) + h(f'(x_0) + \varepsilon(h))\right) - g\left(f(x_0)\right)).$$

Comme la fonction $k(h) = h(f'(x_0) + \varepsilon(h))$ tend vers 0, pour $h$ tendant vers 0, il existe un intervalle $U \subset V$ voisinage de 0 tel que $\forall h \in U,\ k(h) \in W$. On a alors, pour tout $h \in U$,

$$\begin{aligned} g\left(f(x_0) + h(f'(x_0) + \varepsilon(h))\right) &= g\left(f(x_0) + k(h)\right), \\ &= g\left(f(x_0)\right) + k(h)g'(y_0) + k(h)\eta\left(k(h)\right). \end{aligned}$$

D'où, pour tout $h \in U$,

$$(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) = hg'(y_0)f'(x_0) + h\underbrace{(\varepsilon(h))g'(y_0) + (f'(x_0) + \varepsilon(h))\eta\,(k(h)))}_{\delta(h)}.$$

Comme $\lim_{h\to 0} \delta(h) = 0$, le nombre $g'(y_0)f'(x_0) = f'(x_0)g' \circ f\,(x_0)$ est bien le nombre dérivé de $g \circ f$ en $x_0$.□

Voici une application de ce théorème : il s'agit d'une démonstration du point 3. de la proposition 3.2 n'utilisant pas le point 3. de la proposition 2.6.

**Proposition 3.4.** *Soit $I$ un intervalle d'intérieur non vide $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies et dérivables sur $I$, $g$ ne s'annulant pas sur $I$. Alors la fonction $f/g$, définie sur $I$, est dérivable sur $I$ et de fonction dérivée $(f'g - fg')/g^2$.*

**Preuve.**- Soit $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto 1/x$. On vérifie (directement) que $\varphi$ est dérivable sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, de dérivée $\varphi'(x) = -1/x^2$. La fonction $g$, continue et ne s'annulant pas, garde un signe constant sur $I$. Elle est donc à valeurs dans l'un des intervalles ci-dessus, et la fonction $1/g$ hérite de la même propriété. Comme la fonction $1/g$ s'écrit $\varphi \circ g$, elle est dérivable sur $I$ et de dérivée $(1/g)' = g'/g^2$ par application du théorème 3.3. Comme $f/g$ apparait comme le produit de $f$ par $(\varphi \circ g)$, la proposition 3.2 entraine la dérivabilité. On a

$$(f/g)' = f'/g + fg'/g^2 = (f'g - fg')/g^2.\square$$

### 3.3.2. Dérivée d'une fonction réciproque

Ce résultat est le plus délicat de ce chapitre. L'énoncé que l'on donne va dépendre des ‹‹ pré-requis ›› que l'on se donnera. Voici par exemple deux énoncés possibles, le premier étant celui dont les hypothèses sont les plus faibles.

**Théorème 3.5.** *Soit $I$ un intervalle ouvert, $f$ une fonction numérique définie et dérivable sur $I$, dont la dérivée ne s'annule pas sur $I$. Alors $f$ possède une fonction réciproque $f^{-1}$ dérivable sur $f(I)$, de dérivée vérifiant*

$$\forall y \in f(I), \quad (f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y)). \tag{3.1}$$

**Preuve.**
*i.* Un **théorème de Darboux** (*voir annexe théorème 6.3*) assure que pour une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable $\varphi'(I)$ est un intervalle : ainsi, $\varphi'$ possède la propriété de valeur intermédiaire. Sous les hypothèses du théorème 3.5, $f'$ ne s'annule pas sur $I$ : d'après le théorème de Darboux, elle garde un signe constant sur $I$.

*ii.* Le **théorème des accroissements finis** (*voir annexe théorème 6.2*[2]) montre alors que $f$ est strictement monotone sur $I$ donc bijective sur son image $f(I)$. Comme $f$ est continue et strictement monotone, $f$ est un homéomorphisme de $I$ sur $f(I)$. En particulier, $f(I)$ est un intervalle *ouvert* et $f^{-1}$ est continue sur $f(I)$.

*iii.* Il reste à vérifier que $f^{-1}$ est dérivable et que $\left(f^{-1}\right)'$ vérifie 3.1.
Posons $g = f^{-1}$. Soit $y_0 \in f(I)$ et $x_0 = g(y_0)$. Le quotient

$$\Delta(k) = (g(y_0 + k) - g(y_0))/k,$$

est défini sur un voisinage *pointé* de 0, noté $W^*$. Il s'agit de montrer que ce quotient tend vers $1/f'(x_0)$ pour $k$ tendant vers 0 (par valeurs différentes de 0).
Comme $f$ est bijective, on peut définir une fonction $h$, bijective sur un voisinage $W'$ de 0 par

$$\forall k \in W', \quad y_0 + k = f(x_0 + h(k)) \quad \text{ou} \quad h(k) = g(y_0 + k) - x_0.$$

Comme la fonction $g = f^{-1}$ est continue, $h$ est continue et en particulier on a $\lim_{k\to 0} h(k) = 0$. Puisque $f$ et $h$ sont bijectives, $f(x_0 + h(k)) - y_0$ ne s'annule pas sur $W' \setminus \{0\}$. On a alors pour $k$ assez petit non nul

$$\Delta(k) = \frac{h(k)}{f(x_0 + h(k)) - y_0} = \frac{h(k)}{f(x_0 + h(k)) - f(x_0)}.$$

[2] La démonstration de ce théorème ne nécessite que des résultats sur les fonctions continues et des résultats qui précèdent dans ce document. Il n'y a donc pas de cercle vicieux.

Comme $f$ est dérivable en $x_0$, le rapport $\Delta(k)$ tend vers $1/f'(x_0)$. $\square$

Si l'on veut éviter d'évoquer le théorème de Darboux, on peut donner l'énoncé suivant, dans lequel on mentionne en hypothèse que $f'$ garde un signe constant.

**Théorème 3.6.** *Soit $I$ un intervalle ouvert, $f$ une fonction numérique définie et dérivable sur $I$, dont la dérivée garde un signe constant, sans s'annuler sur $I$. Alors $f$ possède une fonction réciproque $f^{-1}$ dérivable sur $f(I)$, de dérivée vérifiant*

$$\forall y \in f(I), \quad (f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y)).$$

La preuve se limite alors aux points *ii.* et *iii.* de celle du théorème 3.5.

**Remarque** (portant sur les théorèmes 3.5 et 3.6).– Supposer simplement $f$ dérivable et bijective ne suffit pas pour être sur que $f'$ ne s'annule pas sur $I$.

**Exemple 3.** *La fonction $x \to x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable et bijective. Sa dérivée est cependant nulle en $0$. On vérifie alors que sa fonction réciproque $x \to x^{1/3}$ n'est pas dérivable en $0$. (Voir figure 1.)*

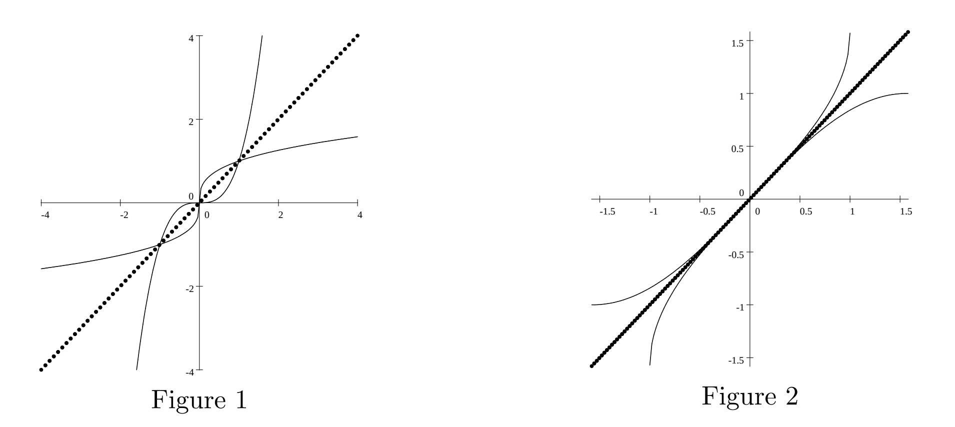



Figure 1

Figure 2

Les théorèmes 3.5 et 3.6 peuvent être illustrés par la recherche des dérivées des fonctions réciproques des fonctions usuelles.

**Exemple 4.** *(Voir figure 2). La restriction de la fonction* sin *à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ est une bijection d'image l'intervalle $[-1, 1]$. Sa fonction réciproque,* $\arcsin x$ *est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$, avec*

$$\forall x \in \,]-1, 1[\,, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En effet, la dérivée $x \mapsto \cos x$ de la fonction sinus est non nulle sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Ainsi la fonction arcsin, réciproque de $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$ est donc dérivable sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. On a

$$\forall x \in \,]-1, 1[\,, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Or, sur l'intervalle $]-1, 1[$ la fonction cos est strictement positive. On a donc $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$, pour tout $t \in \,]-\pi/2, \pi/2[$. D'où

$$\forall x \in \,]-1, 1[\,, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\square$$

Le lecteur fera les raisonnements analogues pour les fonctions arccos, arctan, argsh, argch.

## 4. Fonctions de classe $\mathrm{C}^1$

On utilise toujours la notation $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

### 4.1. Définition

**Définition 8.** *Soit $I$ un intervalle ouvert et $f$ une fonction définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $f$ est dérivable en tout point de $I$ et si la dérivée de $f$ est une fonction continue sur $I$, on dit que $f$ est de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $I$.*

Il est plus difficile de définir les notions de fonctions de classe $\mathrm{C}^1$ lorsque les fonctions sont définies sur des intervalles non ouverts.

**Définition 9.** *Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et $f$ une fonction définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $f$ est de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $I$ si*
*i. la fonction $f$ est dérivable sur $[a, b]$ au sens de la définition 7 (donc continue sur $[a, b]$) ;*
*ii. la fonction $f$ est de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $]a, b[$ ;*
*iii. la fonction $f'$ est continue sur $[a, b]$.*

Le lecteur établiera les définitions analogues pour les intervalles semi-ouverts.

On peut démontrer la caractérisation suivante des fonctions de classe $\mathrm{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$.

**Proposition 4.1.** *Soit $f$ une fonction définie sur $I = [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. La fonction $f$ est de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $[a, b]$ si et seulement si elle est continue sur $[a, b]$ de classe $C^1$ sur $]a, b[$ et si $f'$ (définie sur $]a, b[$) se prolonge par continuité à droite en $a$ et à gauche en $b$. On a alors de plus*

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a, x > a} f'(x) \ ; \quad f'(b^-) = \lim_{x \to b, x < b} f'(x).$$

La preuve repose sur le théorème des accroissements finis. Par rapport à la définition, cette proposition permet d'éviter de vérifier la dérivabilité de $f$ à droite en $a$, à gauche en $b$ et la continuité de la dérivée en ces points.

### 4.2. Propriétés

On dispose des propriétés suivantes, analogues à celles des paragraphes 3.2 et 3.3.

**Proposition 4.2.** *Soit $I$ un intervalle d'intérieur non vide $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $I$. Soit encore $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a alors :*
*1. la fonction $\lambda f + \mu g$, définie sur $I$, est de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $I$ ;*
*2. la fonction $fg$, définie sur $I$, est de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $I$.*

**Théorème 4.3.** *Soit $I$ et $J$ des intervalles ouverts, $f$ une fonction définie et de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $I$., vérifiant $f(I) \subset J$ et $g$ une fonction définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $I$. La fonction composée $g \circ f$, définie sur $I$, est de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $I$.*

**Preuve**.- Sous les hypothèses faites, la fonction $g \circ f$ est dérivable, de dérivée $g' \circ f.f'$ d'après le théorème 3.3. Or, les fonctions $f$ et $f'$ sont continues sur $I$ et la fonction et $g'$ l'est sur $J$. Il en résulte la continuité de $(g \circ f)' = g' \circ f.f'$.□

**Théorème 4.4.** *Soit $I$ un intervalle ouvert, $f$ une fonction définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $I$, dont la dérivée ne s'annule pas sur $I$. Alors $f$ possède une fonction réciproque $f^{-1}$ de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur $f(I)$.*

**Preuve**.- Sous les hypothèses faites, la fonction $f^{-1}$ est dérivable, de dérivée $1/\left(f' \circ f^{-1}\right)$d'après le théorème 3.3. Or, la fonction $f'$ est continue sur $I$ et la fonction $f^{-1}$ sur $f(I)$ (voir le théorème 3.3). D'où la continuité de $(f^{-1})' = 1/\left(f' \circ f^{-1}\right)$.□

## 5. Dérivées d'ordre supérieur

Ce paragraphe peut être utile pour les épreuves orales du CAPES, même s'il ne fait pas l'objet d'une leçon d'oral. Nous serons donc assez bref ; en particulier les preuves des propositions et théorèmes (en général relativement faciles) seront laissées en exercice. On consultera un cours de DEUG, si l'on souhaite plus de détails.

### 5.1. Définitions

La notion de dérivée d'ordre $n$ d'une fonction peut se définir par récurrence.

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ non vide, $f$ une application définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $n$ un entier supérieur ou égal à deux. Par convention, on notera $f^{(0)} = f$ et, lorsqu'elle existe, $f' = f^{(1)}$.

**Definition 5.1.** *Soit $x_0 \in I$. On dit que $f$ est $n$ fois dérivable en $x_0$ s'il existe un intervalle $J$, voisinage de $x_0$, sur lequel $f$ est dérivable $n-1$ fois et si l'application, définie sur $J$, par $x \mapsto f^{(n-1)}(x)$ est dérivable en $x_0$.*
*On note alors $f^{(n)}(x_0)$ le nombre dérivé en $x_0$ de cette application et on l'appelle dérivée $n^{ième}$ de $f$ en $x_0$.*

**Notation**.- On notera aussi $f''(x_0)$ la dérivée seconde de $f$ en $x_0$.

**Définition 10.** *On dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ si $f$ est $n$ fois dérivable en tout point de $I$.*
*On appelle alors dérivée $n^{ième}$ de $f$ l'application définie sur $I$ par $x \mapsto f^{(n)}(x)$.*

**Remarque**.- Pour que $f$ soit $n$ fois dérivable sur $I$, il faut et il suffit que $f$ soit $n-1$ fois dérivable sur $I$ et que $f^{(n-1)}$ (qui est définie sur $I$) soit une fonction dérivable sur $I$.

**Définition 11.** *On dit que $f$ est de classe $C^n$ sur $I$ si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et si l'application $f^{(n)}$ est continue sur $I$.*

On laisse au lecteur le soin de définir les fonctions de classe $\mathrm{C}^n$ sur un intervalle fermé, ou sur un intervalle semi-ouvert : il pourra s'inspirer des paragraphes précédents.

### 5.2. Propriétés

#### 5.2.1. Linéarité

Soit $n \geq 0$ un entier, $I$ un intervalle d'intérieur non vide, $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $n$ fois dérivable sur $I$ (*resp.* de classe $\mathrm{C}^n$ sur $I$). Soit encore $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

**Proposition 5.2.** *La fonction $\lambda f + \mu g$, définie sur $I$, est $n$ fois dérivable sur $I$ (resp. de classe $\mathrm{C}^n$ sur $I$) et l'on a*

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

On en déduit par récurrence :

**Corollaire 5.3.** *Soit $n, p \geq 0$ deux entiers, $I$ un intervalle d'intérieur non vide, $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de $p$ fonctions définies sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $n$ fois dérivable sur $I$ (resp. de classe $\mathrm{C}^n$ sur $I$). Soit encore $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$. On a*

$$\left(\sum_{i=0}^{p} \lambda_i f_i\right)^{(n)} = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i f_i{}^{(n)}.$$

#### 5.2.2. Dérivée $n^{ième}$ d'un produit

Soit $I$ un intervalle d'intérieur non vide, $f$ et $g$ deux fonctions définies et $n$ fois dérivable sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dispose de la *formule de Leibniz.*

**Proposition 5.4.** *La fonction $fg$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et l'on a*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i f^{(i)} g^{(n-i)}.$$

La **preuve** se fait par récurrence sur $n$. La formule est vraie pour $n = 0$ (et $n = 1$). Supposons la vraie pour un entier $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i f^{(i)} g^{(n-i)}\right)' \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i \left(f^{(i)} g^{(n-i)}\right)' \quad \text{(corollaire 5.3)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i \left(f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f^{(i)} g^{(n+1-i)}\right) \quad \text{(dérivée d'un produit)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{i-1} \left(f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i f^{(i)} g^{(n+1-i)}\right) \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{C}_n^{i-1} + \mathrm{C}_n^i\right) f^{(i)} g^{(n+1-i)} + f g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^i f^{(i)} g^{(n+1-i)} + f g^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^i f^{(i)} g^{(n+1-i)}. \square
\end{aligned}$$

On en déduit le théorème suivant.

**Théorème 5.5.** *Si les fonctions $f$ et $g$ sont de classe $\mathrm{C}^n$ sur $I$ alors la fonction $fg$ est de classe $\mathrm{C}^n$ sur $I$.*

#### 5.2.3. Composition et fonctions réciproques des applications $n$ fois dérivables

**Théorème 5.6.** *Soit $I$ et $J$ des intervalles ouverts, $f$ une fonction numérique définie et $n$ fois dérivable sur $I$ (resp. de classe $\mathrm{C}^n$ sur $I$), vérifiant $f(I) \subset J$ et $g$ définie et $n$ fois dérivable sur $I$ (resp. de classe $\mathrm{C}^n$ sur $I$), à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'application composée $g \circ f$, définie sur $I$, est $n$ fois dérivable sur $I$ (resp. de classe $\mathrm{C}^n$ sur $I$).*

**Théorème 5.7.** *Soit $I$ un intervalle ouvert, $f$ une fonction numérique définie et de classe $\mathrm{C}^1$ sur $I$, dont la dérivée ne s'annule pas sur $I$. Alors $f$ possède une fonction réciproque $f^{-1}$ $n$ fois dérivable sur $I$ (resp. de classe $\mathrm{C}^n$ sur $I$).*

## 6. Annexe

Dans toute cette annexe, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

### 6.1. Le théorème des accroissements finis

On démontre l'égalité classique des accroissements finis à l'aide du théorème de Rolle, dont on rappelle l'énoncé et la démonstration.

#### 6.1.1. Le théorème de Rolle

**Théorème 6.1.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle fermé d'intérieur non vide $[a, b]$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ vérifiant de plus $f(a) = f(b)$. Il existe alors $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

**Preuve.**- Si la fonction $f$ est constante sur $[a, b]$, le résultat est vrai : tout $c \in ]a, b[$ convient. On supposera donc dorénavant $f$ non constante. Il existe alors $d \in ]a, b[$ tel que $f(d) \neq f(a)$. On supposera, par exemple, $f(d) > f(a)$. Comme $f$ est continue sur $[a, b]$, $f$ est bornée sur $[a, b]$ et il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. En outre, on a $f(c) \geq f(d) > f(a)$ et donc $c$ appartient à $]a, b[$. On a les inégalités

$$\forall x \in ]a, c[, \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \; ; \quad \forall x \in ]c, b[, \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Comme $f$ est dérivable en $c$, on en déduit, par prolongement d'inégalité

$$f'(c) = f'(c^-) = \lim_{x \to c, x < c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \; ; \quad f'(c) = f'(c^+) = \lim_{x \to c, x > c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

D'où le résultat.□

#### 6.1.2. L'égalité des accroissements finis

**Théorème 6.2.** *Soit $f$ une application à valeurs réelles définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ d'intérieur non vide et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in ]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

**Preuve.**- Comme $f$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, l'application $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous vérifie aussi ces deux hypothèses

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in ]a, b[, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

Comme $g(b) = f(a) = g(a)$, le théorème de Rolle entraine l'existence de $c \in ]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a donc

$$f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a).$$

### 6.2. Un théorème de Darboux

Ce théorème constitue une nouvelle application de l'égalité des accroissements finis, montrée ci-dessus.

**Théorème 6.3.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.*

**Preuve**.– Soit $(a,b) \in I^2$, $a \neq b$. On définit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(a) = f'(a)\ ; \qquad \forall x \in ]a,b], \ \ \varphi(x) = (f(x) - f(a))/(x-a).$$

Comme la fonction $x \mapsto x - a$ ne s'annule pas sur $]a,b]$, la fonction $\varphi$ est continue sur $]a,b]$. Comme $f$ est dérivable en $a$, on a $\lim_{x\to a^+} \varphi(x) = f'(a) = \varphi(a)$. Ainsi $\varphi$ est continue sur $[a,b]$. Le théorème des accroissements finis entraine que

$$\forall x \in ]a,b], \ \ \exists c \in ]a,b], \quad \varphi(x) = (f(x) - f(a))/(x-a) = f'(c).$$

Comme par ailleurs $\varphi(a) = f'(a)$ on en déduit que $\forall x \in [a,b]\,,\ \varphi(x) \in f'(I)$. Ainsi $\varphi\left([a,b]\right) \subset f'(I)$.
De même la fonction $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(b) = f'(b), \qquad \forall x \in [a,b[ \ \ \psi(x) = (f(b) - f(x))/(b-x).$$

est continue avec $\psi\left([a,b]\right) \subset f'(I)$.
Comme $\varphi$ (*resp.* $\psi$) est continue sur $[a,b]$, $\varphi([a,b])$ (*resp.* $\psi([a,b])$) est un intervalle. De plus $\varphi([a,b]) \cap \psi([a,b])$ est non vide puisque $\varphi(b = \psi(a) = (f(b) - f(a))/(b-a)$ y habite. Ainsi, la réunion $\varphi([a,b]) \cup \psi([a,b])$ est un intervalle. De plus, les propriétés $f'(a) \in \varphi([a,b])$ et $f'(b) \in \psi([a,b])$ entrainent que le segment $[f'(a), f'(b)]$ est inclus dans l'intervalle $\varphi([a,b]) \cup \psi([a,b])$, lui même inclus dans $f'(I)$ d'après ce qui précéde. Ainsi, pour tout $(a,b) \in I^2$, $[f'(a), f'(b)]$ est inclus dans $f'(I)$ : $f'(I)$ est bien un intervalle.□

**IUFM de GUADELOUPE -Morne Ferret - BP 517**
**97178 ABYMES CEDEX (Guadeloupe)**




**PLC1-Mathématiques**
**Auteur : A. Delcroix**

CALCUL DIFFERENTIEL II
Grands théorèmes - Applications

## 1. Introduction

Dans la lignée de *Calcul différentiel I*, ce document regroupe des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel comme le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis.

Les applications classiques sont données, comme :

- l'étude du sens de variation d'une fonction à valeurs réelles (section 3),
- la recherche d'extremum d'une fonction à valeurs réelles (section 3),
- les formules de Taylor (section 4),
- l'étude locale de la position d'une courbe par rapport aux tangentes (section 5).

Dans l'optique de l'utilisation de ce document dans une préparation à l'épreuve d'oral 1 du CAPES, certaines notions sont présentées suivant quelques variantes qui correspondent soit à un niveau de fin des classes du secondaire, soit du début du DEUG.

**Convention.-** Dans tout le chapitre, lorsque l'on parle d'un intervalle $[a, b]$, il est sous-entendu que $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$.

## 2. Inégalité et égalité des accroissements finis

### 2.1. Le théorème de Rolle

**Théorème 2.1.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle fermé d'intérieur non vide $[a, b]$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ vérifiant de plus $f(a) = f(b)$. Il existe alors $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

**Preuve.-** Si la fonction $f$ est constante sur $[a, b]$, le résultat est vrai : n'importe quel $c \in ]a, b[$ convient. On supposera donc dorénavant $f$ non constante. Il existe alors $d \in ]a, b[$ tel que $f(d) \neq f(a)$. On supposera, par exemple, $f(d) > f(a)$. Comme $f$ est continue sur $[a, b]$, $f$ est bornée sur $[a, b]$ et, de plus, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. En outre, on a $f(c) \geq f(d) > f(a)$ et donc $c$ appartient à $]a, b[$. On a les inégalités

$$\forall x \in ]a, c[, \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \qquad \forall x \in ]c, b[, \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Comme $f$ est dérivable en $c$, on en déduit, par prolongement d'inégalité

$$f'(c) = f'(c^-) = \lim_{x \to c, x < c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \qquad f'(c) = f'(c^+) = \lim_{x \to c, x > c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

D'où le résultat.□

**Remarque.-** Les applications du théorème de Rolle sont nombreuses. Certaines des plus importantes sont vues au fil de ce document. Citons déjà ici :
1. l'égalité et l'inégalité des accroissements finis, pour les fonctions à valeurs réelles (voir ci-dessous) ;
2. la formule de Taylor-Lagrange.

### 2.2. Commentaires sur l'inégalité des accroissements finis

L'approche de l'inégalité des accroissements finis diffère sensiblement entre les classes de terminales et le DEUG. Dans les applications données ci-dessous on indiquera à quel niveau elles peuvent être abordées.

#### 2.2.1. Niveau terminale

L'inégalité des accroissements finis se montre souvent à l'aide du lien existant entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée. Comme le résultat liant le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée se déduit de l'égalité des accroissements finis, il y a un cercle vicieux ! Mais c'est ce qu'on peut faire de mieux en terminale.
Compte tenu des possibilités offertes par le programme du CAPES, cette approche est donc à proscrire.

#### 2.2.2. Niveau DEUG

**1.** Pour les fonctions à valeurs réelles, l'inégalité des accroissements finis se voit souvent comme corollaire de l'égalité des accroissements finis. Cette dernière se montre à l'aide du théorème de Rolle. C'est cette approche qui est retenue ci-dessous.
Si dans un exposé sur l'inégalité des accroissements finis vous indiquez le théorème de Rolle en ‹ ‹ pré-requis › ›, il faut s'attendre à ce que le Jury vous demande de le démontrer. Mais le théorème de Rolle ou l'égalité des accroissements finis font partie des résultats dont les preuves doivent être connues.

**2.** l'inégalité des accroissements finis, également appelée *théorème des accroissements finis*, est un résultat qui s'étend aux fonctions à valeurs vectorielles, contrairement à l'égalité des accroissements finis. Ainsi, en existe-t-il des preuves indépendantes de l'égalité des accroissements finis. Elles sont parfaitement abordables au niveau du CAPES. On en donne une dans la section 4 consacrée aux formules de Taylor où une forme plus générale de l'inégalité des accroissements finis est présentée.

### 2.3. L'inégalité des accroissements finis au niveau terminale

*On rappelle à titre culturel l'approche de l'inégalité des accroissements finis au niveau du lycée.*

**Théorème 2.2.** *Soit $f$ une application définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ d'intérieur non vide et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe deux nombres $m$ et $M$ tels que*

$$\forall x \in ]a, b[, \quad m \leq f'(x) \leq M.$$

*Alors on a*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

**Remarque.-** Plus généralement, sous les mêmes hypothèses, on a, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\begin{array}{c} m(x-a) \leq f(x) - f(a) \leq M(x-a) \\ m(b-x) \leq f(b) - f(x) \leq M(b-x) \end{array}.$$

On obtient ces deux inégalités en appliquant le théorème au couple $(a, x)$ puis au couple $(x, b)$ au lieu du couple $(a, b)$

**Preuve.-** les deux applications suivantes sont définies, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$

$$g(x) = M(x-a) - (f(x) - f(a)) \qquad h(x) = m(b-x) - (f(b) - f(x)).$$

Les applications $g$ et $h$ possèdent chacune une dérivée positive sur $]a, b[$. Elles sont donc croissantes sur $[a, b]$ : or, $g(a) = 0$ et $h(b) = 0$. Donc $g$ est positive sur $[a, b]$ et $h$ est négative sur $[a, b]$.□

**Remarque**.- On a utilisé le fait qu'une fonction $g$ croissante sur $]a, b[$ et *continue* sur $[a, b]$ est croissante sur $[a, b]$. Ce résultat dépasse sans doute les capacités exigibles d'un élève de lycée.

**Corollaire 2.3.** *Soit $f$ une application définie et dérivable sur un intervalle $I$ d'intérieur non vide et $x$ et $y$ deux points de $I$. On suppose qu'il existe $M$ tel que : $\forall \xi \in I, \ |f'(\xi)| \leq M$.*

Alors on a $|f(y) - f(x)| \leq M\,|y - x|$.

La **preuve** est directe (Attention : distinguer les deux cas $x \leq y$ et $x > y$).

### 2.4. Egalité et inégalité des accroissements finis (niveau DEUG)

Les notations sont celles du théorème 2.2 ci-dessus.

**Théorème 2.4.** *Soit $f$ une application définie et continue sur un intervalle $[a,b]$ d'intérieur non vide et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c). \tag{2.1}$$

**Preuve.-** Comme $f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ l'application $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ définie ci-dessous vérifie aussi ces deux hypothèses

$$\forall x \in [a,b], \quad g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Sa dérivée est définie par

$$\forall x \in ]a,b[, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

Comme $g(b) = f(a) = g(a)$, le théorème de Rolle entraine l'existence de $c \in ]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a donc

$$f'(c) = (f(b)-f(a))/(b-a).\square$$

On en déduit l'inégalité des accroissements finis (*cf.* théorème 2.2) :

**Corollaire 2.5.** *Avec les notations du théorème 2.4, on suppose qu'il existe deux nombres $m$ et $M$ tels que*

$$\forall x \in ]a,b[, \quad m \leq f'(x) \leq M. \tag{2.2}$$

*Alors*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

**Preuve.-** Le théorème 2.4, entraine l'existence de $c \in ]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$. L'inégalité 2.2 entraine immédiatement le résultat (car $b - a > 0$).$\square$

Le théorème 2.4 entraine la version plus familière de l'inégalité des accroissements finis :

**Théorème 2.6.** *Soit $f$ une application définie et continue sur un intervalle $[a,b]$ d'intérieur non vide et dérivable sur $]a,b[$. On a*

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in ]a,b[} |f'(x)|\,(b-a), \tag{2.3}$$

*où le sup est pris égal à $+\infty$ si $f'$ n'est pas bornée sur $]a,b[$.*

### 2.5. Interprétation géométrique (niveau terminale ou DEUG)

*Lors d'un exposé le lecteur doit accompagner ce paragraphe de figures.*

**1.** Soit $f$ une application vérifiant les hypothèses du théorème 2.2. D'après la remarque suivant le théorème 2.2, on dispose des inégalités, valables pour tout $x \in [a,b]$

$$m(x-a) + f(a) \leq f(x) \leq M(x-a) + f(a). \tag{2.4}$$

$$M(x-b) + f(b) \leq f(x) \leq m(x-b) + f(b). \tag{2.5}$$

Notons alors $D_M$, $D_m$, $\Delta_M$, $\Delta_m$ les droites d'équations respectives

$$\begin{array}{llll} (D_M) & y = M(x-a) + f(a) & (D_m) & y = m(x-a) + f(a) \\ (\Delta_M) & y = M(x-b) + f(b) & (\Delta_m) & y = m(x-b) + f(b) \end{array}.$$

Des inégalités 2.4 et 2.5, on déduit que la courbe representative de la fonction $f$ se situe à l'intérieur du parallélogramme déterminé par les quatre droites $D_M$, $D_m$, $\Delta_M$, $\Delta_m$ (voir figure ci-dessous).

**2.** Soit $f$ une application vérifiant les hypothèses du théorème et soit $x_0 \in ]a, b[$. Pour tout point $x \in [x_0, b]$, on a $\quad m(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M(x - x_0)$.
Pour tout $x \in [a, x_0]$, on a $m(x_0 - x) \leq f(x_0) - f(x) \leq M(x_0 - x)$.
En notant $d_m$ la droite d'équation $y = m(x-x_0)+f(x_0)$ et $d_M$ la droite d'équation $y = M(x-x_0)+f(x_0)$ on en déduit que la courbe representative de $f$ est située à l'intérieur du cône délimité par les droites $d_m$ et $d_M$ prises dans cet ordre.

### 2.6. Applications de l'*inégalité* des accroissements finis

#### 2.6.1. Encadrement de fonctions usuelles (niveau terminale)

On utilise à cette fin l'inégalité des accroissements finis lorsqu'on dispose d'une majoration de la dérivée de la fonction à encadrer.
**Exemples.**
1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $\sin x \leq x$.

**Remarque**.- A partir de cette inégalité, on peut en déduire de plus fines concernant les fonctions sin et cos, en intégrant membre à membre.

#### 2.6.2. Caractérisation des fonctions constantes (niveau terminale ou DEUG)

**Théorème 2.7.** *Soit $f$ une application d'un intervalle $I$ à valeurs réelles, continue sur $I$ et dérivable sur l'intérieur de $I$. La fonction $f$ est constante si, et seulement si, sa dérivée $f'$ est nulle sur l'intérieur de $I$.*

**Preuve**.- On suppose l'intérieur de $I$ non vide, sinon le théorème est trivial.
1. Si $f$ est constante, il est clair que $f'$ est nulle sur $I$.
2. Si $f'$ est nulle sur l'intérieur de $I$, $f'$ est majorée par 0 sur cet intérieur : pour tout couple $(x, y)$ de points de $I$, on a $|f(y) - f(x)| \leq 0$, par application de l'inégalité des accroissements finis. D'où $f(y) = f(x)$.□

#### 2.6.3. Théorèmes de prolongement (niveau DEUG)

On donne un exemple de ce type de résultat.

**Théorème 2.8.** *Soit $f$ une application d'un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ existe. Alors $f'$ est dérivable à droite en $a$.*

**Preuve.**- On note $l = \lim_{x \to a^+} f'(x)$. On va montrer que la dérivée à droite en $a$ est égale à $l$. Pour cela, on pose $\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)l$, égalité qui définit une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et on étudie $\lim_{x \to a^+} \varphi(x)/(x - a)$.
Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in ]a, a + \eta], \quad |f'(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Comme $\varphi'(\cdot) = f'(\cdot) - l$, il vient : $\forall x \in ]a, a + \eta], \ \mid \varphi'(x) \mid \leq \varepsilon$.
L'inégalité des accroissements finis appliquée à $\varphi$ sur $[a, a + \eta]$ donne alors

$$\forall x \in [a, a + \eta], \quad |\varphi(x)| \leq \varepsilon\, |x - a|.$$

On en déduit $\lim\limits_{x \to a^+} \varphi(x)/(x - a) = 0$. Puis $\lim\limits_{x \to a^+} (f(x) - f(a))/(x - a) = l$.□

### 2.6.4. Théorème du point fixe (niveau terminale ou DEUG)

On dispose du résultat suivant.

**Théorème 2.9.** *Soit $f$ une application définie sur un intervalle $I = [a,b]$, dérivable sur $I$, telle que $f(I) \subset I$ et qu'il existe $K$, avec $0 < K < 1$, pour lequel*

$$\forall x \in I, \ \ |f'(x)| \leq K.$$

*Alors :*
*1. l'application $f$ possède un unique point fixe $\alpha$ ;*
*2. pour tout $x_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ (pour tout $n \geq 0$) converge vers $\alpha$.*

**Preuve.**
*1. Existence et unicité du point fixe.*
L'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, continue sur $I$. En effet l'hypothèse $f(I) \subset I$ entraine $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$.
L'unicité se démontre en utilisant l'inégalité des accroissements finis. Si l'on suppose l'existence de deux points fixes $\alpha$ et $\beta$ on aura $|f(\beta) - f(\alpha)| = |\beta - \alpha| \leq K\,|\beta - \alpha|$. D'où l'égalité $\beta = \alpha$, puisque $K < 1$.

2. *Existence et convergence de la suite.*- La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie, car $f(I) \subset I$. La convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ se prouve alors à l'aide de l'inégalité des accroissements finis. On a pour tout $n > 0$

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq K\,|u_n - \alpha|\,.$$

D'où par une récurrence facile $\forall n \geq 0 \ \ |u_n - \alpha| \leq K^n\,|u_0 - \alpha|$. Comme $0 < K < 1$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\alpha$.$\square$

**Remarque**.- En terminale, on admet l'existence et l'unicité du point fixe sous les hypothèses de continuité et de stricte monotonie de $f$. Si l'on place l'exposé à ce niveau, il convient donc d'adapter l'énoncé du théorème.

### 2.6.5. Divergence de la série harmonique et constante d'Euler (niveau terminale)

La fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec comme dérivée la fonction $x \mapsto 1/x$. On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis sur chaque intervalle $[n, n+1]$ $(n \geq 1)$, en constatant que $1/n$ majore $1/x$ sur un tel intervalle, pour obtenir : $\forall n \geq 1, \ \ \ln(n+1) - \ln n \leq 1/n$.
D'où, par sommation : $\forall n \geq 1, \ \ \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} 1/k$.
On en déduit la divergence de la série harmonique.

**Remarque**.- On a en fait : $\forall n \geq 1, \ \ 1/(n+1) \leq \ln(n+1) - \ln n \leq 1/n$.
D'où : $\forall n \geq 1, \ \ \sum_{k=2}^{n+1} 1/k \leq \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} 1/k$.
On en déduit l'encadrement

$$\forall n \geq 1, \ \ \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} 1/k \leq 1 + \ln(n+1)$$

On en déduit que la suite $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ est équivalente à $\ln(n+1)$, pour $n$ tendant vers $+\infty$. On étudie alors la suite $(w_n)_{n\geq 1} = (s_n - \ln(n+1))_{n\geq 1}$ qui est bornée, et monotone (l'étude de $w_{n+1} - w_n$ se fait de nouveau avec l'inégalité des accroissements finis !). La suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est alors convergente et sa limite est la constante d'Euler (*Cf* CAPES 88, première épreuve).

## 3. Sens de variation d'une fonction et recherche d'extremum

### 3.1. Sens de variation d'une fonction

*Nous présentons ici le résultat comme une application de l'*égalité *des accroissements finis.*

Soit $f$ une application numérique définie sur un intervalle $I$ d'intérieur non vide et dérivable sur l'intérieur de $I$, notée $\overset{\circ}{I}$. On dispose du résultat suivant :

**Théorème 3.1.** *1. Sont équivalentes :*

1.$i$. *la dérivée* $f'$ *est positive (resp. négative) sur* $\overset{\circ}{I}$,
1.$ii$. *l'application* $f$ *est croissante (resp. décroissante) sur* $I$

2. *Si* $f'$ *est strictement positive (resp. strictement négative) sur* $\overset{\circ}{I}$ *alors* $f$ *est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur* $I$.

**Preuve.**
[1.$i$. $\Rightarrow$ 1.$ii$.] Supposons $f'$ positive sur $I$. Soit $a$ et $b$ deux points de $I$ vérifiant $a < b$. Sous les hypothèses faites, il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. Comme $f'(c) \geq 0$, il vient $f(a) \leq f(b)$.

[1.$ii$. $\Rightarrow$ 1.$i$.] Supposons $f$ croissante et considérons $c \in \overset{\circ}{I}$. Comme $f$ est croissante la fonction

$$\delta : x \mapsto (f(x) - f(c))/(x - c)$$

définie sur un voisinage à droite de $c$ est positive. Comme $f$ est dérivable en $c$ on a $f'(c) = \lim_{x \to c^+} \delta(x)$, limite qui est positive par prolongement d'inégalité.

La partie *respectivement* se traite en remplacant $f$ par $-f$.

2. Il suffit de reprendre l'argument du [1.$i$. $\Rightarrow$ 1.$ii$.], en remplacant les inégalités larges par des inégalités strictes.□

**Remarque.**- Le célèbre exemple de la fontion $f$ définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x^3$ montre qu'une fonction peut être strictement monotone même si sa dérivée s'annule en un point intérieur de son intervalle de définition.

### 3.2. Recherche d'extremum

#### 3.2.1. Définitions

Soit $f$ une application numérique définie sur un intervalle $I$ d'intérieur non vide et $a$ un point de $I$.

**Définitions 1.**
*1. On dit que* $f$ *possède un* maximum local *ou un* maximum relatif *(resp.* maximum local strict*) au point* $a$ *s'il existe un intervalle* $J$ *voisinage de* $a$ *tel que*

$$\forall x \in J \cap I, \quad f(x) \leq f(a) \qquad (\textit{resp. } \forall x \in J \cap I \backslash \{a\}, \quad f(x) < f(a)\,).$$

*2. On dit que* $f$ *possède un* minimum local *ou* minimum relatif *(resp.* minimum local strict*) au point* $a$ *s'il existe un intervalle* $J$ *voisinage de* $a$ *tel que*

$$\forall x \in J \cap I, \quad f(a) \leq f(x) \qquad (\textit{resp. } \forall x \in J \cap I \backslash \{a\}, \quad f(a) < f(x)\,).$$

**Définitions 2.**
*1. On dit que* $f$ *possède un* maximum absolu *(resp.* maximum absolu strict*) au point* $a$ *si*

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(a) \qquad (\textit{resp. } \forall x \in I \backslash \{a\}, \quad f(x) < f(a)\,).$$

*2. On dit que* $f$ *possède un* minimum absolu *(resp.* minimum absolu strict*) au point* $a$ *si*

$$\forall x \in I, \quad f(a) \leq f(x) \qquad (\textit{resp. } \forall x \in I \backslash \{a\}, \quad f(a) < f(x)\,).$$

On note que les définitions précédentes recouvrent le cas ou l'intervalle $I$ est fermé ou semi-fermé et que $a$ est une de ses bornes. Si $f$ possède un maximum ou un minimum (*resp.* local, absolu, strict) au point $a$ on dira que $f$ possède en ce point un *extremum* (*resp.* local, absolu, strict). On dit souvent, un peu improprement, que le point $a$ est un extremum.

#### 3.2.2. Condition nécessaire (du premier ordre) d'extremum

Soit $f$ une application numérique définie sur un intervalle $I$ d'intérieur non vide et $a$ un point **intérieur** de $I$.

**Proposition 3.2.** *On suppose* $f$ *dérivable en* $a$. *Si* $f$ *possède un extremum en* $a$, *alors* $f'(a) = 0$.

**Preuve.-** Supposons que $f$ possède un maximum (local, absolu, strict ou non). Il existe dans chacun des cas un intervalle $J = ]a - \delta, a + \delta[$, voisinage de $a$, inclus dans $I$, tel que $\forall x \in J \;\; f(x) \leq f(a)$. D'où les inégalités

$$\forall x \in ]a - \delta, a[, \;\; (f(x) - f(a))/(x - a) \geq 0 \qquad \forall x \in ]a, a + \delta[, \;\; (f(x) - f(a))/(x - a) \leq 0.$$

Comme $f$ est supposée dérivable en $a$, il vient par prolongement d'inégalité $f'(a) = f'(a^-) \geq 0$ et $f'(a) = f'(a^+) \leq 0$. D'où le résultat.□

**Remarques.**
1. Il est d'usage de faire remarquer que cette condition nécessaire n'est pas suffisante, comme le montre l'inusable exemple de la fontion $f$ définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x^3$. En zéro, $f'$ s'annule sans que $f$ présente un extremum en ce point.

2. Il faut aussi remarquer que dans la proposition 3.2 le point $a$ est supposé *intérieur* à $I$. Cette condition est indispensable et son omission source de nombreuses erreurs.
Par exemple, la fonction $f$ définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 1/x$ présente un maximum absolu en $a = 1$ alors que la dérivée à droite en ce point est strictement négative.

On dispose cependant de résultat portant sur les extrema, ‹‹ aux bornes d'un intervalle de définition ››. Par exemple :

**Proposition 3.3.** *Soit $f$ définie sur l'intervalle $[a, b[$ et dérivable en $a$. Si $a$ est un maximum (*resp. *minimum) local de $f$ alors*

$$f'(a) \leq 0 \qquad (\text{resp. } f'(a) \geq 0).$$

**Preuve.-** Supposons que $a$ soit un maximum local de $f$. Il existe alors un intervalle $J$ de la forme $]a, a+\delta[$ avec $\delta > 0$ tel que $\forall x \in ]a, a + \delta[ \;\; f(x) \leq f(a)$. Il en résulte que

$$\forall x \in ]a, a + \delta[, \qquad (f(x) - f(a))/(x - a) \leq 0.$$

Par prolongement d'inégalité, la dérivée à droite en $a$ est négative ou nulle.□

### 3.2.3. Conditions suffisantes d'extremum

Soit $f$ une application numérique définie et dérivable sur un intervalle $I$ d'intérieur non vide. Soit encore $c$ un point de l'intérieur de $I$.
On dispose du résultat suivant :

**Théorème 3.4.** *Supposons que $f'(c)$ est nul et qu'il existe un intervalle $J$ inclus dans $I$, voisinage de $c$ tel que $f'$ est décroissante (resp. croissante) sur $J$. Alors la fonction $f$ possède au point $c$ un maximum local et (resp. minimum local).*

**Preuve.-** On peut toujours se ramener au cas ou $J$ est un intervalle fermé $[a, b]$, voisinage de $c$. On se place dans le cas où $f'$ est décroissante sur $[a, b]$. Des hypothèses, on déduit que $f'$ est positive sur $[a, c]$ et négative sur $[c, b]$. La fonction $f$ est croissante sur $[a, c]$ et décroissante sur $[c, b]$ d'après le théorème 3.1. On en déduit que

$$\forall x \in [a, c], \quad f(x) \leq f(c) \quad ; \quad \forall x \in [c, b], \quad f(x) \leq f(c).$$

La fonction $f$ présente donc bien un maximum au point $c$.□

**Remarques.**
1. *Remarque de présentation en oral de CAPES* : il est bon d'accompagner ce résultat d'un tableau de variations.

2. Dans le théorème 3.4, si l'intervalle $J$ peut être pris égal à $I$, le point $c$ sera un extremum global.

3. La condition de monotonie (de la dérivée) figurant au théorème 3.4 n'est pas nécessaire.

**Exemple 1.** *Considérons, en effet, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0 = 0$ et $f(x) = x^2(1 + \sin(1/x))$, pour $x \neq 0$.*

Cette fonction est dérivable à l'origine (en étudiant le rapport $(f(x) - f(0))/x$), avec $f'(0) = 0$. Par ailleurs $f$ est de classe $C^\infty$ sur la réunion $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ avec

$$\forall x \in ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[, \quad f'(x) = 2x(1 + \sin(1/x)) - \cos(1/x).$$

Comme $\lim_{x\to 0, x\neq 0} 2x(1 + \sin(1/x)) = 0$, le terme en $\cos(1/x)$ entraine que sur tout voisinage *pointé* de 0 $f'$ prend des valeurs non nulles de signes contraires. La dérivée de $f$ n'est donc monotone sur aucun voisinage de 0. Pourtant, comme $x^2(1 + \sin(1/x)) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $f$ possède un minimum en 0. Le lecteur constatera que le graphe de $f$ est compris entre la parabole d'équation $y = 2x^2$ et la droite d'équation $y = 0$ (ci-dessous, le graphe de $f$).

On tire du théorème 3.4 la traditionnelle condition suffisante, utilisant la dérivée seconde.

**Corollaire 3.5.** *Soit $f$ une application numérique définie et deux fois dérivable sur un intervalle $I$ d'intérieur non vide. On suppose qu'il existe $c$ tel que $f'(c)$ soit nul. S'il existe un un intervalle $J$ inclus dans $I$, voisinage de $c$ sur lequel $f''$ est négative (resp. positive), alors la fonction $f$ possède au point $c$ un maximum local et (resp. minimum local).*

**Preuve.-** Placons nous dans la situation où $f''$ est négative sur $J$. D'après le théorème 3.1, $f'$ est décroissante sur $J$ et on est ramené aux hypothèses du théorème 3.4.□

On dispose de résultats analogues au théorème 3.4 et au corollaire 3.5 pour les extrema stricts. On laisse les démonstrations au soins du lecteur.

**Théorème 3.6.** *Soit $f$ une application numérique définie et dérivable sur un intervalle $I$ d'intérieur non vide. On suppose qu'il existe $c$ tel que $f'(c)$ soit nul et un intervalle $J$ voisinage de $c$ tel que $f'$ soit strictement décroissante (resp. croissante) sur $J$. Alors la fonction $f$ possède au point $c$ un maximum local strict (resp. minimum local strict).*

**Corollaire 3.7.** *Soit $f$ une application numérique définie et deux fois dérivable sur un intervalle $I$ d'intérieur non vide. On suppose qu'il existe $c$ tel que $f'(c)$ soit nul. S'il existe un un intervalle $J$ inclus dans $I$, voisinage de $c$ sur lequel $f''$ est strictement négative (resp. positive), alors la fonction $f$ possède au point $c$ un maximum local strict (resp. minimum local strict).*

**Remarques.-** les conditions énoncées dans ces deux derniers résultats ne sont pas, *a fortiori*, nécessaires.
1. Pour le théorème 3.6, la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2(2 + \sin(1/x))$, pour $x \neq 0$ (exemple adapté de celui ci-dessus) montre qu'une fonction peut présenter un extremum strict en un point alors que sa dérivée n'est monotone sur aucun voisinage de ce point.
2. Pour le corollaire 3.7, la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ montre qu'une fonction peut posséder un extremum strict en un point où sa dérivée seconde s'annule.

## 4. Les formules de Taylor

### 4.1. Généralisation des théorèmes de Rolle et des accroissements finis

*Cette généralisation n'intervient en fait que dans la preuve de la formule de Taylor-Young, lorsque l'on fait des hypothèses faibles. Elle peut donc être omise en première lecture.*

### 4.1.1. Généralisation du théorème de Rolle

**Théorème 4.1.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle fermé d'intérieur non vide $[a,b]$, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Il existe alors $c \in ]a,b[$ tel que*

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c) \tag{4.1}$$

**Preuve.-** Soit $h$ la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$\forall x \in [a,b], \quad h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x).$$

La fonction $h$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et de plus

$$h(a) = h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. Ce qui entraine l'égalité (4.1).□

**Remarque.-** En prenant pour $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x$, on retrouve l'égalité des accroissements finis. Ainsi certains auteurs appellent l'égalité des accroissements finis *théorème de Rolle* et réservent le nom de *théorème des accroissements finis* à l'inégalité des accroissements finis.

### 4.1.2. Une forme générale de l'inégalité des accroissements finis

**Théorème 4.2.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles définies et continues sur un intervalle $[a,b]$ d'intérieur non vide et dérivables sur $]a,b[$ vérifiant de plus*

$$\forall x \in ]a,b[, \qquad |f'(x)| \leq g'(x). \tag{4.2}$$

*Alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a). \tag{4.3}$$

### 4.1.3. Deux démonstrations

On utilise les notations de l'énoncé.

**A l'aide du théorème de Rolle.** Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. On peut appliquer le théorème 4.1 démontré ci-dessus à la fonction $f$ et à la fonction $g_\varepsilon : x \mapsto g(x) + \varepsilon x$, dont la dérivée, strictement positive sur $]a,b[$, vérifie

$$\forall x \in ]a,b[, \qquad |f'(x)| < g'_\varepsilon(x).$$

Il existe donc $c \in ]a,b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'_\varepsilon(c) = (g_\varepsilon(b) - g_\varepsilon(a))\, f'(c). \tag{4.4}$$

Comme $g'_\varepsilon(c)$ est strictement positif et la fonction $g_\varepsilon$ croissante, il vient

$$|f(b) - f(a)| = (g_\varepsilon(b) - g_\varepsilon(a))\, \frac{|f'(c)|}{g'_\varepsilon(c)} < g_\varepsilon(b) - g_\varepsilon(a) = g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a).$$

Donc, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |f(b) - f(a)| < g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a).$$

Ce qui entraine $\;|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.□

**Une preuve plus intrinsèque de l'inégalité des accroissements finis.** Cette preuve est généralisable aux cas :

- d'une fonction $f$ à valeurs dans un espace normé.
- de fonctions uniquement dérivables à droite en tout point de $]a,b[$.

Elle repose sur les propriétés des intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons $a' \in \,]a, b]$. Posons

$$F = \{t \in [a', b] \mid |f(t) - f(a')| \leq (g(t) - g(a') + \varepsilon\,(t - a')) \leq 0 \ \},$$
$$E = \{x \in [a', b] \mid [a', x] \subset F \ \}.$$

L'ensemble $F$ est fermé car image réciproque de $]-\infty, 0]$ par la fonction continue $t \mapsto |f(t) - f(a')| - (g(t) - g(a')) - \varepsilon\,(c - a')$.
Par construction $E$ est un intervalle, non vide ($a' \in E$) fermé (conséquence de la fermeture de $F$). Montrons qu'il est égal à $[a', b]$.
Supposons à l'inverse que $E$ soit strictement inclus dans $[a', b]$ c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a', b[$ tel que $E = [a', c]$. Comme $f$ (*resp.* $g$) est dérivable en $c \geq a' > a$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in [c, c+\eta[\,, \quad \left|\frac{f(t) - f(c)}{t - c} - f'(c)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \left|\frac{g(t) - g(c)}{t - c} - g'(c)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier

$$\forall t \in [c, c+\eta[\,, \ \ |f(t) - f(c)| \leq |f'(c)|\,(t - c) + \frac{\varepsilon}{2}\,(t - c) \qquad g'(c)\,(t - c) - \frac{\varepsilon}{2}\,(t - c) \leq |g(t) - g(c)|\,.$$

Comme par hypothèse, on a $|f'(x)| \leq g'(x)$, pour tout $x \in \,]a, b[$, et en particulier en $c$, il vient

$$\forall t \in [c, c+\eta[\,, \quad |f(t) - f(c)| \leq g(t) - g(c) + \varepsilon\,(t - c)\,.$$

Pour tout $t \in [c, c+\eta[$, l'inégalité triangulaire donne

$$|f(t) - f(a')| \leq |f(c) - f(a')| + |f(t) - f(c)|\,.$$

Or, $|f(c) - f(a')| \leq g(c) - g(a') + \varepsilon\,(c - a')$ car $c \in E$. D'où

$$|f(t) - f(a')| \leq g(c) - g(a') + \varepsilon\,(c - a') + g(t) - g(c) + \varepsilon\,(t - c) = g(t) - g(a) + \varepsilon\,(t - a')\,.$$

Ainsi $[c, c+\eta[ \subset E$, ce qui contredit la définition de $c$. D'où $E = [a', b]$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \forall a' \in \,]a, b]\,, \quad |f(b) - f(a')| \leq g(b) - g(a') + \varepsilon\,(b - a')\,.$$

Par continuité de la fonction $t \mapsto |f(b) - f(t)| - (g(b) - g(t) + \varepsilon\,(b - t))$ il vient (prolongement d'inégalité)

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon\,(b - a)\,.$$

Puis $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.□

### 4.2. Formules de Taylor-Lagrange

#### 4.2.1. L'égalité de Taylor-Lagrange

**Théorème 4.3.** *Soit $n$ un entier positif, $I$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f$ une application de classe $\mathrm{C}^n$ définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant de plus une dérivée $(n+1)^{ième}$ sur l'intérieur de $I$. Pour tout couple $(x, y)$ de points de $I$, il existe $c$ strictement compris entre $x$ et $y$ tel que*

$$f(y) = f(x) + \textstyle\sum_{k=1}^{n} (y - x)^k f^{(k)}(x)/k! + (y - x)^{n+1} f^{(n+1)}(c)/(n+1)!\,. \tag{4.5}$$

**Remarques.-** La Formule de *Mac-Laurin* consiste à poser dans la formule (4.5) $h = y - x$, $c = x + \theta h$ (avec $\theta \in ]0, 1[$) de sorte que :

**Théorème 4.4.** *Soit $n$ un entier positif, $I$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f$ une application de classe $\mathrm{C}^n$ définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant de plus une dérivée $(n+1)^{ième}$ sur l'intérieur de $I$. Soit $x$ un point de l'intérieur de $I$ et $h$ tel que $x + h$ appartiennent à $I$, il existe $\theta \in ]0, 1[$ tel que*

$$f(x + h) = f(x) + \textstyle\sum_{k=1}^{n} h^k f^{(k)}(x)/k! + h^{n+1} f^{(n+1)}(x + \theta h)/(n+1)!\,.$$

**Définition 3.** *Le polynôme $h \mapsto \sum_{k=0}^{n} h^k f^{(k)}(x)/k!$ s'appelle le polynôme de Taylor de $f$ d'ordre $n$ au point $x$.*

**Preuve** du théorème 4.3.- Quitte à permuter leur rôle, on peut supposer $x < y$. On définit la fonction $\varphi_n$ sur $[x, y]$ par

$$\forall t \in [x, y], \quad \varphi_n(t) = f(y) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(y-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \alpha \frac{(y-t)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{4.6}$$

où $\alpha$ est choisi de sorte que $\varphi_n(x) = 0$ (ce qui est effectivement possible et le lecteur constatera qu'il est inutile de calculer la valeur de $\alpha$ pour la suite de la démonstration). On remarque qu'on a également $\varphi_n(y) = 0$.
La fonction $\varphi_n$ est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ avec

$$\forall t \in ]x, y[, \quad \varphi_n'(t) = -(y-t)^n f^{(n+1)}(t)/n! + \alpha(y-t)^n/n!\,. \tag{4.7}$$

Comme $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$, le théorème de Rolle entraine l'existence de $c \in ]x, y[$ tel que $\varphi_n'(c) = 0$. A partir d'expression de $\varphi_n'$ (égalité (4.7)), on constate que $\alpha = f^{(n+1)}(c)$. On conclut en faisant $t = x$ dans l'égalité (4.6).□

#### 4.2.2. L'inégalité de Taylor-Lagrange

**Théorème 4.5.** *Soit $n$ un entier positif, $I$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $f$ une application de classe $C^n$ définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant de plus une dérivée $(n+1)^{ième}$ bornée sur l'intérieur de $I$. Si $M$ est un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur l'intérieur de $I$, on a pour tout couple $(x, y)$ de points de $I$*

$$\left|f(y) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} (y-x)^k f^{(k)}(a)/k!\right| \leq M\,|y-x|^{n+1}/(n+1)!\,.$$

**Remarques**.
1. Ce théorème est vrai *mutatis mutandis* pour les fonctions à valeurs dans un espace normé comme cela a été rappelé dans l'introduction.
2. Nous donnons deux preuves de ce résultat :

- la première preuve utilise le théorème de Rolle : elle est donc spécifique du cas des fonctions à valeurs réelles ;
- la deuxième preuve utilise la forme ‹‹ générale ›› de l'inégalité des accroissements finis ; elle s'adapte directement pour les fonctions à valeurs vectorielles, mais peut être omise dans le cadre d'une préparation à l'oral du CAPES.

**Première preuve** (indications).- On applique le théorème 4.3 dont la preuve repose sur le théorème de Rolle, à la fonction $f$. Pour tout $(x, y) \in I^2$ il existe $c$ compris entre $x$ et $y$ tels que

$$f(y) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} (y-x)^k f^{(k)}(x)/k! = (y-x)^{n+1} f^{(n+1)}(c)/(n+1)!\,.$$

D'où par passage à la valeur absolue et majoration de $\left|f^{(n+1)}(c)\right|$ l'inégalité

$$\left|f(y) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} (y-x)^k f^{(k)}(a)/k!\right| \leq M\,|y-x|^{n+1}/(n+1)!\,.\square$$

**Seconde preuve.**- Supposons que l'on ait $x < y$. On définit une fonction $\psi_n$ continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ par

$$\forall t \in [x, y] \qquad \psi_n(t) = f(y) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(y-t)^k}{k!} f^{(k)}(t).$$

On a alors : $\forall t \in ]x, y[,\ \psi_n'(t) = -(y-t)^n f^{(n+1)}(t)/n!$ et, par hypothèses,

$$\forall t \in ]x, y[ \quad \left|\psi_n'(t)\right| \leq M(y-t)^n/n!. \tag{4.8}$$

La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = M(y-t)^{n+1}/(n+1)!$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée le second membre de l'inégalité (4.8). Par application de l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$|\psi_n(x)| = |\psi_n(y) - \psi_n(x)| \leq g(y) - g(x) = g(y) = M(y-x)^{n+1}/(n+1)!\,.\square$$

### 4.3. Formules de Taylor-Young

*Nous donnons deux énoncés de la formule de Taylor-Young qui diffèrent par les hypothèses de régularité. Un candidat au CAPES peut éventuellement se contenter de connaître la version avec les* hypothèses fortes*.*

#### 4.3.1. La formule de Taylor-Young (hypothèses fortes)

*La preuve de cette version de la formule de Taylor-Young utilise un peu de calcul intégral élémentaire.*

**Théorème 4.6.** *Soit $n$ un entier positif, $a$ un réel, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, voisinage de $a$ et $f$ une application définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $C^n$ sur $I$ et $(n+1)$ fois dérivable en $a$. Alors il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$ et*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \textstyle\sum_{k=1}^{n}(x-a)^k f^{(k)}(a)/k! + (x-a)^{n+1}(\dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \varepsilon(x)).$$

**Remarques.**
1. Ce théorème est vrai *mutatis mutandis* pour les fonctions à valeurs dans un espace normé.
2. La formule de Taylor-Young possède un caractère *local* alors que l'inégalité de Taylor-Lagrange possède un caractère global.

**Preuve** (théorème 4.6).- Ce théorème se démontre par récurrrence sur l'entier $n$.
1. Pour $n = 0$, l'hypothèse entraine que $f$ est dérivable en $a$. Alors $f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en ce point, ce qui est exactement la conclusion du théorème 4.6 pour $n = 0$.
2. Supposons le théorème vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ $(n \geq 1)$. Soit $f$ vérifiant les hypothèses du théorème, à l'ordre $n$. On définit une fonction $R$ de $I$ sur $\mathbb{R}$ possédant la même régularité que $f$ en posant

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{n+1}(x-a)^k f^{(k)}(a)/k! + R(x). \tag{4.9}$$

La fonction $f'$ est de classe $C^{n-1}$ sur $I$ et $n$ fois dérivable en $a$ : par hypothèse de récurrence, il existe une fonction $\varepsilon(\cdot)$ définie sur $I$ telle que $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$ et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f'(a) + \textstyle\sum_{k=1}^{n}(x-a)^k f^{(k+1)}(a)/k! + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

En dérivant la relation 4.9, il vient

$$\forall x \in I, \quad R'(x) = (x-a)^n\varepsilon(x).$$

Pour $\delta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in ]a-\eta, a-\eta[\cap I, \; |\varepsilon(x)| \leq \delta$, donc tel que

$$\forall x \in ]a-\eta, a-\eta[\cap I, \qquad -\delta\,|x-a|^n \leq R'(x) \leq \delta\,|x-a|^n\,. \tag{4.10}$$

Comme la fonction $x \mapsto R'(x)$ est continue, il vient en intégrant successivement pour $x > a$ et $x < a$ les inégalités

$$\forall x \in ]a-\eta, a-\eta[\cap I, \qquad -\frac{\delta}{(n+1)}\,|x-a|^{n+1} \leq \textstyle\int_a^x R'(t)\mathrm{d}t \leq \dfrac{\delta}{(n+1)}\,|x-a|^{n+1}\,.$$

Comme $R'(a) = 0$, On en déduit

$$\forall x \in ]a-\eta, a-\eta[\cap I, \qquad |R(x)| \leq \frac{\delta}{(n+1)}\,|x-a|^{n+1}\,.$$

Il en résulte que

$$(\forall\delta > 0) \;\; (\exists\eta > 0) \;\; (\forall x \in I) \quad \left(0 < |x-a| < \eta \Rightarrow \left|\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < \frac{\delta}{(n+1)}\right),$$

et donc que $\lim_{x\to a, x\neq a} R(x)/(x-a)^{n+1} = 0$. En posant $\tilde{\varepsilon}(x) = R(x)/(x-a)^{n+1}$ et $\tilde{\varepsilon}(a) = 0$, on obtient

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{n+1}(x-a)^k f^{(k)}(a)/k! + (x-a)^{n+1}\,\tilde{\varepsilon}(a) \;\text{ avec } \displaystyle\lim_{x\to a}\tilde{\varepsilon}(x) = 0.\Box$$

### 4.3.2. La formule de Taylor-Young (hypothèses faibles)

*Ici, les hypothèses faites sont affaiblies. La preuve de cette version de la formule de Taylor-Young est une application de la forme générale du théorème des accroissements finis, démontrée ci-dessus.*

Nous donnons deux formes équivalentes de ce résultat.

**Théorème 4.7.** *Soit $n$ un entier strictement positif, $a$ un réel, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, voisinage de $a$ et $f$ une application définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $n$ fois dérivable en $a$. Alors*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \left( \frac{1}{(x-a)^n} \left( f(x) - f(a) - \textstyle\sum_{k=1}^n (x-a)^k \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} \right) \right) = 0.$$

**Théorème 4.8.** *Soit $n$ un entier strictement positif, $a$ un réel, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, voisinage de $a$ et $f$ une application définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $n$ fois dérivable en $a$. Alors il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \textstyle\sum_{k=1}^n (x-a)^k \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

**Remarques.**
1. Ce théorème est vrai *mutatis mutandis* pour les fonctions à valeurs dans un espace normé et la démonstration donnée ci-dessous s'adapte directement à ce cadre.

2. *Preuve de l'équivalence entre les deux énoncés.*- Le premier énoncé étant supposé vrai, on pose, pour $x \in I$, $R(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n (x-a)^k f^{(k)}(a)/k!$ et on définit la fonction $\varepsilon(\cdot)$ sur l'intervalle $I$ par

$$\varepsilon(x) = R(x)/\left(x-a\right)^n \quad \text{si} \quad x \neq a \qquad ; \qquad \varepsilon(a) = 0.$$

La fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ est continue au point $a$ car par hypothèses, $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Ceci donne le deuxième énoncé. La réciproque est immédiate.

3. La fonction $f$ étant $n$ fois dérivable au point $a$, il existe nécéssairement un voisinage de $a$ sur lequel $f$ est $n-1$ fois dérivable ; d'une manière plus générale, il existe un intervalle $J$ voisinage de $a$ sur lequel les dérivées $f^{(k)}$ de $f$ existent pour $1 \leq k \leq n-1$.

**Preuve** (théorèmes 4.7 et 4.8).- Ce théorème se démontre par récurrrence sur l'entier $n$.
1. Pour $n = 1$, l'hypothèse revient à supposer $f$ dérivable en $a$. Alors $f$ admet un développement limité à l'ordre 1, ce qui est exactement la conclusion du théorème 4.8 pour $n = 1$.

2. Supposons le théorème vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ et soit $f$ vérifiant les hypothèses du théorème, à l'ordre $n$. On définit une fonction $R$ de $I$ sur $\mathbb{R}$ possédant la même régularité que $f$ en posant

$$\forall x \in I, \quad R(x) = f(x) - f(a) - \textstyle\sum_{k=1}^n (x-a)^k f^{(k)}(a)/k!.$$

La fonction $f'$ est définie sur un intervalle $J$ voisinage de $a$ (voir remarque 3.). De plus, $f'$ est $n-1$ fois dérivable en $a$, ce qui montre, en utilisant l'hypothèse de récurrence, qu'il existe une fonction $\varepsilon(t)$ définie sur $J$ telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\forall x \in J, \quad f'(x) - f'(a) - \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} (x-a)^k f^{(k+1)}(a)/k! = (x-a)^{n-1} \varepsilon(x), \tag{4.11}$$

soit encore

$$\forall x \in J, \quad R'(x) = (x-a)^{n-1} \varepsilon(x).$$

Pour $\delta > 0$, il existe donc $\eta > 0$ tel que $\forall x \in ]a-\eta, a-\eta[ \cap J, \ |\varepsilon(t)| \leq \delta$, donc tel que

$$\forall x \in ]a-\eta, a-\eta[ \cap J, \qquad |R'(x)| \leq \delta \left|x-a\right|^{n-1}. \tag{4.12}$$

En posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = (\delta/n) \left|x-a\right|^{n-1} (x-a).$$

on définit une fonction *continue* sur $\mathbb{R}$ et *dérivable* sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ de dérivée, pour $x \neq a$, le second membre de l'inégalité (4.12). L'inégalité des accroissements finis, appliquée soit à l'intervalle $[a, x]$ soit à l'intervalle $[a, x]$ donne pour $x \neq a$ et $x \in ]a-\eta, a-\eta[ \cap J$ la majoration

$$|R(x)| = |R(x) - R(a)| \leq |g(x) - g(a)| = |g(x)| = (\delta/n) \left|x-a\right|^n.$$

D'où la propriété

$$(\forall \delta > 0) \quad (\exists \eta > 0) \quad (\forall x \in J) \quad (0 < |x-a| < \eta \Rightarrow \left|R(x)/\left(x-a\right)^n\right| < \delta/n).$$

Ce qui entraine la conclusion.□

### 4.4. La formule de Taylor avec reste intégral

*Il s'agit d'une application du calcul intégral, et plus particulièrement du théorème d'intégration par parties.*

**Théorème 4.9.** *Soit $n$ un entier positif, $I=[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $f$ une application de classe $\mathrm{C}^{n+1}$ définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in I$*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t \tag{4.13}$$

**Remarques.**

1. Cette formule est souvent d'un emploi plus commode que celles qui précèdent en ce qu'elle donne un contrôle exact du reste. Cependant les hypothèses sont ici plus fortes.

2. On effectue souvent le changement de variables $u = (t-a)/(b-a)$ dans la formule (4.13), ce qui donne le :

**Corollaire 4.10.** *Avec les notations et les hypothèses du théorème 4.9 on a*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}\left(a + u(b-a)\right) \mathrm{d}u.$$

**Preuve** du théorème 4.9.- L'outil essentiel est le théorème d'intégration par parties. On procède par récurrence sur l'entier $n$.
1. Pour $n = 0$, on suppose donc que $f$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[a,b]$. On a alors, pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}t,$$

puisque $f$ est continue donc intégrable sur $[a,b]$.
2. On suppose la formule vraie jusqu'au rang $n$, $n \geq 1$ et on considère $f$ de classe $\mathrm{C}^{n+1}$ sur $I$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} (x-a)^k f^{(k)}(a)/k! + \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}/(n-1)!\, \mathrm{d}t \tag{4.14}$$

Comme $f^{(n)}$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $I$, on peut intégrer par parties le dernier terme de l'égalité (4.14). On a donc

$$\begin{aligned}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}/(n-1)!\, \mathrm{d}t &= -\left[f^{(n)}(t)(x-t)^n/n!\right]_a^x + \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n/n!\, \mathrm{d}t, \\ &= f^{(n)}(a)(x-a)^n/n! + \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n/n!\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'où le résultat, en remplacant dans (4.14).□

### 4.5. Une application des formules de Taylor : les développements limités

En appliquant la formule de Taylor-Young (théorème 4.8), on obtient directement la :

**Proposition 4.11.** *Soit $n$ un entier strictement positif, $a$ un réel, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, voisinage de $a$ et $f$ une application définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $n$ fois dérivable en $a$. Alors la fonction $f$ admet un développement limité en $a$ donné par le polynôme de Taylor d'ordre $n$ de $f$ en $a$*

$$\sum_{k=0}^{n} (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

On renvoie le lecteur au document *outils pour l'étude locale des fonctions* pour une étude des développements limités.

## 5. Position d'une courbe par rapport aux tangentes

### 5.1. Remarques introductives

Nous considérons ici le problème comme local, à savoir préciser au voisinage d'un point la position respective d'une courbe et de sa tangente en ce point. Cette question se traite souvent comme application des développements limités[1]. On la trouve ici traitée comme application du calcul différentiel.

Cette approche dépend fortement des outils que l'on se donne en ‹‹ pré-requis ›› :

- la dérivée d'ordre 1 et la simple inégalité des accroissements finis ;
- la dérivée d'ordre 1, le théorème de Rolle et donc le théorème des accroissements finis ;
- les dérivées d'ordre supérieur qui autorisent des conditions suffisantes plus maniables ;
- la formule de Taylor-Young, qui permet d'écrire des développements limités et l'on rejoint le point de vue cité plus haut.

*Le texte qui suit n'est en aucun cas un modèle d'exposé, mais contient la plupart des résultats permettant d'en construire un avec plusieurs choix d'approches possibles.*
Dans un autre ordre d'idée, sa lecture doit être enrichie de figures (dessins de courbes montrant les différents cas, tableaux de variations, etc.) et de l'études d'exemples.

### 5.2. Etude locale de la position d'une courbe par rapport à une tangente

On considère dans la suite $f$ une application numérique définie et dérivable sur un intervalle $I$ d'intérieur non vide, $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le plan affine et $a$ un point de l'intérieur de $I$.

Comme $f$ est dérivable en $a$, la courbe $\mathcal{C}$ possède au point $(a, f(a))$ une tangente $\mathcal{T}_a$ d'équation

$$y - f(a) = (x-a)f'(a).$$

On dispose d'un premier résultat.

**Proposition-Définition 4.** *Supposons qu'il existe un intervalle $J$ voisinage de $a$ inclus dans $I$ tel que $f'$ soit croissante sur $J$ (resp. décroissante sur $J$).*
*Alors on a*

$$\forall x \in J,\ \ f'(a)(x-a) + f(a) \leq f(x) \quad (\textit{resp.}\ \forall x \in J,\ \ f'(x)(x-a) + f(a) \geq f(x)).$$

*Autrement dit, sur le voisinage $J$, la courbe $\mathcal{C}$ est située au dessus (resp. au dessous) de la tangente $T_a$. Le point $(a, f(a))$ est alors appelé* point ordinaire *de la courbe $\mathcal{C}$.*

**Preuve.-** Traitons le cas ou $f'$ est croissante sur un intervalle $J$, voisinage de $a$. La fonction

$$g\ :\ x \mapsto f(x) - f'(a)(x-a) + f(a)$$

est définie et dérivable sur $I$, de dérivée $g' : x \mapsto f'(x) - f'(a)$. Comme $f'$ est croissante sur $J$, la fonction $g$ est décroissante sur $]-\infty, a] \cap J$ et croissante sur $J \cap [a, +\infty[$. On a de plus $g(a) = 0$ : $g$ est donc positive sur $J$.□

**Remarque.-** On note le lien très étroit entre la preuve de ce résultat et celle du théorème des accroissements finis, faite au niveau de la terminale. Dans le cas présent, la dérivée de $f$ est majorée sur $]-\infty, a] \cap J$ et minorée sur $J \cap [a, +\infty[$.

Donnons une condition suffisante pour que $(a, f(a))$ soit un point ordinaire, avec une hypothèse plus forte de régularité sur $f$.

**Corollaire 5.1.** *Si $f$ est deux fois continûment dérivable au voisinage du point $a$ et si $f''(a)$ est non nul, le point $(a, f(a))$ est un point ordinaire de $\mathcal{C}$.*

[1] C'est ce qui est fait dans le document *outils pour l'étude locale des fonctions.*

**Preuve.-** La dérivée seconde de $f$ garde un signe constant, sans s'annuler sur un voisinage de $a$ et $f'$ est alors strictement monotone sur ce même voisinage : on applique alors la proposition 4.□

Si l'on accepte l'utilisation de la formule de Taylor-Young, on peut affaiblir les hypothèses de ce corollaire et montrer la proposition qui suit.

**Proposition 5.2.** *Si $f$ est deux fois dérivable au point $a$ et si $f''(a)$ est non nul, le point $(a, f(a))$ est un point ordinaire de $\mathcal{C}$.*

**Preuve.-** Il existe alors un voisinage $V$ de $a$ est une fonction $\varepsilon$ définie sur $V$ tels que

$$\forall x \in V \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2[f''(a) + \varepsilon(x)], \qquad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

alors, pour $x$ assez proche de $a$ le signe de la différence $f(x) - [f(a) + (x-a)f'(a)]$ est celui de $f''(a)$.□
On note qu'ici l'argument est sensiblement différent de ceux utilisés ci-dessus qui relevaient de l'étude des variations des fonctions.

**Remarque.-** Le corollaire 5.1 et la proposition 5.2 sont des conditions suffisantes pour que $(a, f(a))$ soit un point ordinaire.
En effet, pour la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivable, donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) = x^4,$$

le point $(0,0)$ est ordinaire, alors que $f''(0) = 0$. En fait, pour cet exemple le point $(0,0)$ est un *méplat*, puisque $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) \neq 0$.

Dans le cas ou $f'$ n'est monotone sur aucun voisinage de $a$, ‹‹ tout peut arriver ›› comme le montre les exemples suivants.

**Exemple 2.** *On prend $I = \mathbb{R}$ et $f$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) = x^3$.*

La courbe représentative de $f$ traverse la tangente en ce point. Ce type de situation est étudiée ci-dessous.

**Exemple 3.** *On prend $I = \mathbb{R}$ et $f$ définie par*

$$f(0) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \ \ f(x) = x^2 \sin(1/x).$$

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(0) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \ \ f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$

On vérifie que $f'$ n'est monotone sur aucun voisinage de 0 car sur tout voisinage de zéro, $f'$ prend à la fois des valeurs négatives et positives. (En effet on a $\lim_{x\to 0} 2x\sin(1/x) = 0$ et, sur tout voisinage pointé de 0, la fonction $x \mapsto -\cos(1/x)$ prend des valeurs arbitrairement grandes, négatives ou positives.) La courbe représentative de $f$ traverse sa tangente à l'origine une infinité de fois (car $f$ change de signe sur tout voisinage de zéro).

**Exemple 4.** *On considère la fonction $f$ utilisée dans l'exemple 1. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(0) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \ \ f(x) = x^2(1 + \sin(1/x)).$$

Comme dans l'exemple 3, $f'$ n'est monotone sur aucun voisinage de 0. Comme $f'(0) = 0$, la tangente à l'origine est la droite d'équation $y = 0$. De plus : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ 1 + \sin(1/x) \geq 0$. Ainsi, la courbe représentative de $f$ est située au dessus de sa tangente à l'origine.

Cependant on dispose du résultat suivant, illustré par le premier exemple. Les notations sont celles de la proposition 4.

**Proposition 5.3.** *Supposons qu'il existe un intervalle $J$ voisinage de $a$ inclus dans $I$ tel que l'une des conditions suivantes est réalisée :*
*1. $f'$ est croissante sur $]-\infty, a] \cap J$ et décroissante sur $J \cap [a, +\infty[$ ;*
*2. $f'$ est décroissante sur $]-\infty, a] \cap J$ et croissante sur $J \cap [a, +\infty[$.*
*Alors :*
*- si la condition 1. est réalisée, sur $]-\infty, a] \cap J$ la courbe $\mathcal{C}$ est au dessous de la tangente $\mathcal{T}_a$ et sur $J \cap [a, +\infty[$ la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la tangente $\mathcal{T}_a$ ;*
*- si la condition 2. est réalisée, sur $]-\infty, a] \cap J$ la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la tangente $\mathcal{T}_a$ et sur $J \cap [a, +\infty[$ la courbe $\mathcal{C}$ est au dessous de la tangente $\mathcal{T}_a$.*

Plus commodément, on dira que la courbe *traverse* sa tangente au point $(a, f(a))$. On pose alors la définition suivante.

**Définition 5.** *On dit que le point* $(a, f(a))$ *est* un point d'inflexion *de la courbe* $\mathcal{C}$ *si l'une ou l'autre des conditions de la proposition 5.3 est satisfaite.*

La **preuve** de la proposition 5.3 utilise les mêmes arguments que celle de la proposition 4.

Avec des hypothèses plus fortes de régularité sur la fonction $f$, on a une condition nécessaire triviale pour que $(a, f(a))$ soit un point d'inflexion.

**Lemme 5.4.** *Si* $f$ *est deux fois dérivable au point* $a$*, pour que* $(a, f(a))$ *soit un point d'inflexion de la courbe* $\mathcal{C}$ *il faut que* $f''(a)$ *soit nul.*

**Preuve.-** Sinon le point $(a, f(a))$ est ordinaire, selon le corollaire 5.1 ou la proposition 5.2, en fonctions des hypothèses de régularité faites sur $f$.□

En renforcant encore les hypothèses sur $f$, la proposition 5.3 possède le corollaire suivant.

**Corollaire 5.5.** *Si* $f$ *est trois fois continûment dérivable au voisinage du point* $a$ *et si* $f''(a) = 0$ *et* $f^{(3)}(a) \neq 0$*, le point* $(a, f(a))$ *est un point d'inflexion de* $\mathcal{C}$*.*

**Preuve.-** Supposons par exemple $f^{(3)}(a) > 0$. Alors, il existe un intervalle $J$ voisinage de $a$ sur lequel $f''$ est croissante, négative à gauche de $a$, positive à droite de $a$. La dérivée de $f$ est donc est décroissante sur $]-\infty, a] \cap J$ et croissante sur $J \cap [a, +\infty[$. La condition *2.* de la proposition 5.3 est donc réalisée.□

Avec la formule de Taylor-Young, on peut affaiblir les hypothèses de ce corollaire et montrer la proposition qui suit.

**Proposition 5.6.** *Si* $f$ *est trois fois dérivable au point* $a$ *et si* $f''(a) = 0$ *et* $f^{(3)}(a) \neq 0$*, le point* $(a, f(a))$ *est un point d'inflexion de* $\mathcal{C}$*.*

**Preuve.-** D'après le théorème 4.8 appliqué à l'ordre 3, il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur $I$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que

$$f(x) - f(a) = (x - a)\, f'(x) + (x - a)^3 \underline{\left(\frac{f^{(3)}(a)}{6} + \varepsilon(x)\right)}. \tag{5.1}$$

Comme $f^{(3)}(a) \neq 0$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, il existe un intervalle $J$ voisinage de $a$ tel que

$$\forall x \in J, \quad |\varepsilon(x)| < \left|f^{(3)}(a)\right| /6.$$

Alors, la quantité soulignée dans l'expression 5.1 est du signe de $f^{(3)}(a)$. L'étude du signe de la fonction $x \mapsto f(x) - f(a) - (x - a)\, f'(x)$ montre alors que le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.□




**PLC1-Mathématiques**
**Auteur : A. Delcroix**

# CONSTRUCTION
# De l'intégrale de RIEMANN

PROPRIETES ESSENTIELLES

## 1. Définition de l'intégrale

Dans la suite $a$ et $b$ désignent deux réels fixés, avec $a < b$.

### 1.1. Introduction : approche heuristique de l'intégrale de Riemann

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$. Un des buts de l'intégrale de Riemann est de définir et de calculer l'aire de la partie $P$ comprise entre l'axe des $x$ et le graphe de $f$ :

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x \in [a, b]\,,\ 0 \leq y \leq f(x) \right\}.$$

Pour ce faire, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leq i \leq n,\ n$ entier, $x_0 = a,\ x_n = b)$ et on remplace $f$ sur $[x_i, x_{i+1}]$ par une constante $h_i$. Cette constante peut être une valeur prise par $f$ sur cet intervalle (somme de Riemann) ou bien un max ou un min sur cet intervalle (somme de Darboux). On note que ceci suppose $f$ bornée, une des limitations de l'intégrale de Riemann. On somme ensuite les aires des rectangles de longueur $x_{i+1} - x_i$ et de hauteur $h_i$. Une fonction sera dite intégrale au sens de Riemann si les sommes obtenues, soit $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, h_i$, tendent vers une limite $I$ (indépendante du choix des $x_i$ et des $h_i$) lorsque le *pas* $(x_{i+1} - x_i)$ tend vers 0, dans un sens à préciser.
C'est la formalisation de cette démarche qui constitue le contenu de cette section.

### 1.2. Subdivisions d'un intervalle

**Définitions 1.**
*i. On appelle* subdivision *de l'intervalle $[a, b]$ toute suite finie $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ $(n \geq 1)$ de points de $[a, b]$ vérifiant*

$$a = x_0, \qquad x_n = b. \qquad \forall i \in \{1, ....n\}\,, \quad x_{i-1} < x_i.$$

*ii. On appelle pas d'une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ le nombre $\delta(\sigma)$, égal à*

$$\delta(\sigma) := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

**Exemple 1.1.** *Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1 et*

$$\forall i \in \{0, ...., n\}\,, \quad x_i := a + i\frac{b - a}{n}.$$

*La subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ s'appelle la subdvision régulière de $[a, b]$ de pas $(b - a)/n$.*

On notera $\mathcal{S}([a, b])$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ ou simplement $\mathcal{S}$ quand il n'y a pas de confusion possible sur l'intervalle considéré.
Pour $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{S}$, on confondra, quand il n'y a pas d'ambiguité, $\sigma$ qui est une application d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $[a, b]$ et l'ensemble image $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Ainsi, pour $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}^2$, on notera $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision de $[a, b]$ constituée des points de $\sigma$ et de $\sigma'$ rangés dans l'ordre croissant, sans expliciter l'application sous jacente.

**Définition 2.** *Soit $\sigma$ et $\sigma'$ deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que la subdivision $\sigma$ est* moins fine *que la subdivision $\sigma'$ (ou que $\sigma'$ est* plus fine *que $\sigma$) ce que l'on note $\sigma \preceq \sigma'$ si $\sigma \subset \sigma'$, autrement dit, si tout point de $\sigma$ est un point de $\sigma'$.*

**Exemple 1.2.** *Soit $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}([a, b])^2$. La subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que chacune des subdivisions $\sigma$ et $\sigma'$.*

**Remarque 1.** *La relation $\preceq$ est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble $\mathcal{S}$.*

### 1.3. L'ensemble des fonctions bornées définies sur $[a, b]$

On notera dans la suite $\mathcal{B} = \mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $[a, b]$ et à valeurs réelles. On rappelle que :

**Théorème 1.1.** *L'ensemble* $\mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre.*

Dans la suite $\mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$, et certains de ces sous ensembles, joueront un grand rôle, puisque la théorie de l'intégrale de Riemann est une théorie de l'intégration des fonctions bornées.
On note que certains ensembles de fonctions classiques sont inclus dans $\mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$, comme par exemple $\mathrm{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ ainsi que l'ensemble des fonctions monotones définies sur $[a, b]$.

### 1.4. Sommes de Darboux

**Définition 3.** *Soit* $f \in \mathrm{B}([a, b], R)$ *et* $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{S}([a, b])$. *On appelle* somme de Darboux inférieure *(resp.* supérieure*) relative à* $f$ *et* $\sigma$*, la quantité notée* $s(f, \sigma)$ *(resp* $S(f, \sigma)$*) définie par*

$$s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i(f, \sigma), \qquad (\text{resp. } S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i(f, \sigma)),$$

*avec* $m_i(f, \sigma) := \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi), \quad M_i(f, \sigma) := \sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)$.
*(On écrira* $m_i$ *(resp.* $M_i$*) au lieu de* $m_i(f, \sigma)$ *(resp.* $M_i(f, \sigma)$*) lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur* $f$ *et* $\sigma$*.)*

Comme $f \in \mathrm{B}([a, b], R)$, $f$ est en particulier minorée et majorée sur tout intervalle inclus dans $[a, b]$ ce qui justifie l'existence des sommes de Darboux. Avec les notations de la définition 3 on a de manière immédiate

$$s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma).$$

**Lemme 1.2.** *Soit* $f \in \mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$ *et* $\sigma$ *et* $\sigma'$ *deux subdivisions de* $[a, b]$*, on a*

$$\sigma \preceq \sigma' \Longrightarrow s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma') \qquad \sigma \preceq \sigma' \Longrightarrow S(f, \sigma) \leq S(f, \sigma')$$

La **preuve** de ce résultat s'établit par récurrence. On commence par considérer le cas ou $\sigma$ et $\sigma'$ différent d'un point, pour lequel on pose $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Il existe alors $i \in \{0, ...., n-1\}$ tel que $x_i < c < x_{i+1}$. Il est alors facile de comparer $s(f, \sigma)$ et $s(f, \sigma')$ d'une part, et $S(f, \sigma)$ et $S(f, \sigma')$ d'autre part.

On en déduit :

**Proposition 1.3.** *Soit* $f \in \mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$ *et* $\sigma$ *et* $\sigma'$ *deux subdivisions quelconques de* $[a, b]$*, on a*

$$s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma') \tag{1.1}$$

**Preuve**.- Avec les notations du lemme 1.2, on pose $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$. La subdivision $\sigma''$ est plus fine que $\sigma$ et $\sigma'$. D'où

$$s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma'') \leq S(f, \sigma'') \leq s(f, \sigma').$$

Comme conséquence, il vient :

**Corollaire 1.4.** *Soit* $f \in \mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$. *On a*

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} s(f, \sigma) \leq \inf_{\sigma \in \mathcal{S}} S(f, \sigma). \tag{1.2}$$

**Preuve**.- En appliquant la propriété (1.1) avec $\sigma' = \{a, b\}$ on a

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}, \qquad s(f, \sigma) \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Ce qui entraine l'existence du sup du membre de gauche de l'inégalité (1.1). On a alors

$$\forall \sigma' \in \mathcal{S}, \quad \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma')$$

On en déduit l'existence de l'inf du membre de droite l'inégalité (1.1) puis l'inégalité (1.2).

### 1.5. Définition de l'intégrale de Riemann par les sommes de Darboux

Le paragraphe précédent (et notamment la proposition 1.3) montrent que les sommes de Darboux inférieures approchent par défaut les aires que l'on souhaite définir, tandis que les sommes de Darboux supérieures les approchent par excès. La définition de l'intégrale, donnée ci dessus est donc naturelle : si le sup et l'inf du corollaire 1.4 coïncident, la fonction $f$ est intégrable.

**Définition 4.** *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est* intégrable au sens de Riemann *sur* $[a, b]$ *, ou plus briévement,* intégrable *sur* $[a, b]$ *, si elle est bornée sur* $[a, b]$ *et si*

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} s(f, \sigma) = \inf_{\sigma \in \mathcal{S}} S(f, \sigma),$$

*où* $\mathcal{S}$ *désigne l'ensemble des subivisions de l'intervalle* $[a, b]$.

**Notation-définition**. Si $f$ est intégrable sur $[a, b]$ on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ le nombre ci-dessus et on l'appelle *intégrale de* $f$ sur l'intervalle $[a, b]$.

**Théorème 1.5.** (Critère d'intégrabilité).- *Soit* $f \in \mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$. *Sont équivalentes.*
*i. La fonction* $f$ *est intégrable sur* $[a, b]$ ;
*ii. La propriété suivante est satisfaite :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \sigma \in \mathcal{S}, \quad S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon. \tag{1.3}$$

**Preuve**
$[i \Rightarrow ii]$ Soit $\varepsilon > 0$. Par définition du sup (*resp.* de l'inf) il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ (*resp.* $\sigma' \in \mathcal{S}$) tel que

$$0 \leq \sup_{\tau \in \mathcal{S}} s(f, \tau) - s(f, \sigma) < \varepsilon/2 \quad (\textit{resp. } 0 \leq S(f, \sigma') - \inf_{\tau \in \mathcal{S}} S(f, \tau) < \varepsilon/2.$$

En posant $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ il vient, d'après du lemme 1.2, $s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma'')$ et $S(f, \sigma'') \leq S(f, \sigma')$ d'où

$$0 \leq \sup_{\tau \in \mathcal{S}} s(f, \tau) - s(f, \sigma'') < \varepsilon/2 \quad (\textit{resp. } 0 \leq S(f, \sigma'') - \inf_{\tau \in \mathcal{S}} S(f, \tau) < \varepsilon/2.$$

Puis (par égalité du du sup et de l'inf)

$$S(f, \sigma'') - s(f, \sigma'') < \varepsilon.$$

$[ii \Rightarrow i]$ Supposons la propriété (1.3) satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\sigma'' \in \mathcal{S}$ telle que

$$0 \leq S(f, \sigma'') - s(f, \sigma'') \leq \varepsilon.$$

D'où

$$0 \leq \inf_{\tau \in \mathcal{S}} S(f, \tau) - \sup_{\tau \in \mathcal{S}} s(f, \tau) \leq \varepsilon.$$

On en déduit, puisque l'inégalité précédente est vraie pour tout $\varepsilon$, que $\inf_{\tau \in \mathcal{S}} S(f, \tau) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} s(f, \tau)$ et que $f$ est Riemann intégrable.□

**Exemple 1.3.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *constante sur* $]a, b[$*, égale à* $c$ *sur cet intervalle,* $f(a)$ *et* $f(b)$ *pouvant être différents de* $c$*. La fonction* $f$ *est intégrable, avec*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b - a)\,c.$$

Soit en effet $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{S}$. On a

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) &= \max(f(a), c)\,(x_1 - a) + \textstyle\sum_{i=1}^{n-2} (x_{i+1} - x_i)\,c + \max(f(b), c)\,(b - x_{n-1})\,, \\ &= \max(f(a), c)\,(x_1 - a) + (x_{n-1} - x_1)\,c + \max(f(b), c)\,(b - x_{n-1})\,, \\ s(f, \sigma) &= \min(f(a), c)\,(x_1 - a) + (x_{n-1} - x_1)\,c + \min(f(b), c)\,(b - x_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Donc

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) \leq |f(a) - c|\,(x_1 - a) + |f(b) - c|\,(b - x_{n-1})\,.$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, et pour $\sigma \in \mathcal{S}$ de pas inférieur à $\varepsilon$ on a

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) \leq \varepsilon \max\left(|f(a) - c|\,, |f(b) - c|\right),$$

Ce qui prouve que $f$ est intégrable sur $[a, b]$. De plus, pour toute $\sigma \in \mathcal{S}$, on a

$$s(f, \sigma) \leq (b - a)\,c \leq S(f, \sigma).$$

D'où

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} s(f, \tau) = \inf_{\tau \in \mathcal{S}} S(f, \tau) = (b - a)\,c.\square$$

### 1.6. Quelques grandes classes de fonctions intégrables

On présente trois grandes classes de fonctions intégrables au sens de Riemann. Les démonstrations d'intégrabilité reposent principalement sur le critère énoncé au théorème 1.5.

#### 1.6.1. Les fonctions en escalier

**Définition 5.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est en* escalier*, s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{1\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $f$ soit constante sur chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$.*

**Remarque 2.** *On ne dit rien, dans cette définition, de la valeur de $f$ aux points $a_i$, $(0 \leq i \leq n)$.*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier. On dit qu'une subdivision $\sigma = (a_i)_{1\leq i\leq n}$ est *adaptée* à $f$ si $f$ est constante sur chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$. On a alors

**Théorème 1.6.** *Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier est intégrable sur $[a,b]$. Si de plus $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à $f$, avec $f_{|]a_{i-1},a_i[} = y_i$ $(0 \leq i \leq n)$, on a*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\, y_i.$$

Ce théorème, qui peut être démontré directement, sera démontré comme conséquence de la **relation de Chasles** (théorème 3.1) et de l'exemple 1.3.

#### 1.6.2. Les fonctions monotones

**Théorème 1.7.** *Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone est intégrable sur $[a,b]$.*

**Preuve.-** On supposera par exemple $f$ croissante sur $I$. On considère un entier $n \geq 1$ et $\sigma_n = (x_{i,n})_{0\leq i\leq n}$ la subdivision de pas régulier $h_n = (b-a)/n$. La fonction $f$ étant croissante, on a pour tout $i \in \{1,\ldots,n-1\}$

$$M_{i,n} = \sup_{\xi\in[x_{i-1,n},x_{i,n}]} f(\xi) = \inf_{\xi\in[x_{i,n},x_{i+1,n}]} f(\xi) = m_{i+1,n}.$$

D'où, en remarquant que $f(b) = \sup_{\xi\in[x_{n-1,n},x_{n,n}]} f(\xi)$ et $f(a) = \inf_{\xi\in[x_{0,n},x_{1,n}]} f(\xi)$,

$$\begin{aligned} S(f,\sigma_n) - s(f,\sigma_n) &= h_n \left(\sum_{i=1}^n M_{i,n} - \sum_{i=1}^n m_{i,n}\right), \\ &= h_n \left(f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} M_{i,n} - \sum_{i=2}^n m_{i,n} - f(a)\right), \\ &= h_n \left(f(b) - f(a)\right) = (b-a)\left(f(b) - f(a)\right)/n. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, le choix de $n < \varepsilon / ((b-a)(f(b)-f(a)))$, donne $\sigma_n$ telle que $S(f,\sigma_n) - s(f,\sigma_n) < \varepsilon$. Ainsi $f$ est Riemann intégrable.□

#### 1.6.3. Les fonctions continues

**Théorème 1.8.** *Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue est intégrable sur $[a,b]$.*

**Preuve.-** La fonction $f$ étant continue sur le compact $[a,b]$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall\,(x,y) \in [a,b]^2, \qquad |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathcal{S}$, de pas inférieur à $\eta$. On a

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,,\ \ \forall\,(x,y) \in [x_{i-1},x_i]^2\,, \quad |x-y| \leq \eta.$$

D'où

$$\forall\,(x,y) \in [x_{i-1},x_i]^2\,,\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Puis, avec des notations déjà utilisées,

$$M_i - m_i = |M_i - m_i| \leq \left|\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(y)\right| \leq \varepsilon.$$

Il vient donc

$$S(f,\sigma_n) - s(f,\sigma_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\,(M_i - m_i) \leq \varepsilon(b-a).$$

Ainsi, $f$ est intégrable sur $[a,b]$.□

## 2. Les sommes de Riemann

### 2.1. Définitions

**Définitions 6.**
*i. Une* subdivision pointée $(\sigma, \tau)$ *de l'intervalle* $[a, b]$ *est la donnée d'une subdivision* $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *de* $[a, b]$ *et d'une suite finie* $\tau = (t_i)_{1 \leq i \leq n}$ *de points de* $[a, b]$ *vérifiant* $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ *pour* $1 \leq i \leq n$.
*ii. On appelle pas de la subdivision pointée* $(\sigma, \tau)$*, le pas de la subdivision* $\sigma$.

On notera $\mathcal{S}_P([a, b])$ l'ensemble des subdivisions pointées de l'intervalle $[a, b]$ ou simplement $\mathcal{S}_P$ quand il n'y a pas de confusion possible sur l'intervalle considéré.

**Définition 7.** *Soit* $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $(\sigma, \tau)$, $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$, $\tau = (t_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une subdivision pointée de* $[a, b]$*. La somme*

$$R(f, \sigma, \tau) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

*est la* somme de Riemann *relative à la fonction* $f$ *à la subdivision pointée* $(\sigma, \tau)$.

Souvent, on omet dans la notation des sommes de Riemann de préciser explicitement la dépendance vis-à-vis de la famille $\tau$. On note

$$R(f, \sigma) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

On dit alors simplement que $R(f, \sigma)$ est **une** somme de Riemann relative à la subdivision $\sigma$.

### 2.2. Critère d'intégrabilité (par les sommes de Riemann)

On dispose de la propriété suivante :

**Lemme 2.1.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *intégrable sur l'intervalle* $[a, b]$*. Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\eta > 0$ *tel que*

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}, \qquad \left(\delta(\sigma) < \eta \Longrightarrow 0 \leq S(f, \sigma) - \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t < \varepsilon\right)$$

$$(\textit{Resp. } \forall \sigma \in \mathcal{S}, \qquad \left(\delta(\sigma) < \eta \Longrightarrow 0 \leq \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t - s(f, \sigma) < \varepsilon\right)\ ).$$

**Preuve**.- On note $I = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$. On effectue la démonstration pour les sommes de Darboux supérieures, celle pour les sommes inférieures étant analogue.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère d'intégrabilité 1.5, il existe $\sigma_0 = (a_k)_{0 \leq k \leq m} \in \mathcal{S}$ (qui sera fixée jusqu'à la fin de la démonstration) telle que $S(f, \sigma_0) - s(f, \sigma_0) < \varepsilon/2$. Comme $s(f, \sigma_0) \leq I \leq S(f, \sigma)$, on a en particulier

$$0 \leq S(f, \sigma_0) - I < \varepsilon/2.$$

Soit alors $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que

$$\delta(\sigma) < \min_{1 \leq k \leq n} (a_k - a_{k-1}).$$

Avec cette condition, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un point (au moins) de $\sigma$ dans chaque intervalle $[a_{k-1}, a_k]$. On définit, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$x_k = \max\{x \in \sigma \,|x \leq a_k\} \qquad y_k = \min\{x \in \sigma \,|x > a_k\}.$$

(Les points $x_k$ et $y_k$ sont les points de $\sigma$ les plus proches de $a_k$ et sont deux poins consécutifs de $\sigma$.)
On remarque, de plus, que $x_k \leq y_k$, pour tout $k \in \{2, \ldots, n-1\}$.
Posons enfin $\sigma' = \sigma \cup \sigma_0$. Comme $\sigma'$ est plus fine que $\sigma_0$, on a

$$0 \leq S(f, \sigma') - I < \varepsilon/2.$$

Il reste à comparer $S(f, \sigma')$ et $S(f, \sigma)$ (On sait déjà que $S(f, \sigma') \leq S(f, \sigma)$, puisque $\sigma'$ est plus fine que $\sigma$). Comme $\sigma'$ ne diffère de $\sigma$ que par l'ajout des points $a_k$ $(1 \leq k \leq m-1)$, il vient

$$S(f, \sigma) - S(f, \sigma') = \sum_{k=1}^{m-1} (y_k - x_k) M_i - \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - x_k) M_i' - \sum_{k=1}^{m-1} (y_k - a_k) M_i'',$$

avec

$$M_i = \sup_{\xi \in [x_k, y_k]} f(\xi), \qquad M_i' = \sup_{\xi \in [x_k, a_k]} f(\xi), \qquad M_i'' = \sup_{\xi \in [a_k, y_k]} f(\xi).$$

D'où

$$\begin{aligned} S(f,\sigma)-S(f,\sigma') &= \textstyle\sum_{k=1}^{m-1}(a_k-x_k)(M_i-M_i')-\sum_{k=1}^{m-1}(y_k-a_k)(M_i-M_i''),\\ &\le 2\textstyle\sum_{k=1}^{m-1}(a_k-x_k)M+2\sum_{k=1}^{m-1}(y_k-a_k)M,\end{aligned}$$

où l'on a posé : $M=1+\sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)|$.
On a donc

$$S(f,\sigma)-S(f,\sigma')\le 2M\textstyle\sum_{k=1}^{m-1}(y_k-x_k)\le 2M(m-1)\delta(\sigma).$$

En supposant $\delta(\sigma)<\varepsilon/(4Mm)$, il vient

$$S(f,\sigma)\le S(f,\sigma)-S(f,\sigma')+S(f,\sigma')-I<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Ainsi, pour $\varepsilon>0$, le choix de $\eta\le\min\left(\min_{1\le k\le n}(a_k-a_{k-1}),\varepsilon/(4Mm)\right)$ assure que

$$\forall\sigma\in\mathcal{S},\qquad \left(\delta(\sigma)<\eta\Longrightarrow 0\le S(f,\sigma)-\textstyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t<\varepsilon\right).\square$$

On en déduit le :

**Théorème 2.2.** *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ alors*

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\eta>0)\ (\forall(\sigma,\tau)\in\mathcal{S}_P),\quad \left(\delta(\sigma)<\eta\Longrightarrow\left|R(f,\sigma,\tau)-\textstyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon\right).$$

**Preuve**.- En effet, on a : $\forall(\sigma,\tau)\in\mathcal{S}_P,\ s(f,\sigma)\le R(f,\sigma,\tau)\le S(f,\sigma)$. Soit $\varepsilon>0$, d'après le lemme 2.1, il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $\sigma\in\mathcal{S}$ avec $\delta(\sigma)<\eta$

$$0\le I-s(f,\sigma)<\varepsilon\qquad 0\le S(f,\sigma)-I<\varepsilon.$$

Alors

$$-\varepsilon\le s(f,\sigma)-I\le R(f,\sigma,\tau)-I\le S(f,\sigma)-I<\varepsilon,\ \text{(pour toute famille }\tau).\square$$

Ce théorème possède le corollaire suivant (preuve immédiate) qu'on utilisera en fait le plus souvent :

**Corollaire 2.3.** *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. Soit $(\sigma_n,\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de subdivisions pointées de $[a,b]$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\delta(\sigma_n)=0$.*
*Alors $lim_{n\to+\infty}R(f,\sigma_n,\tau_n)$ existe et*

$$lim_{n\to+\infty}R(f,\sigma_n,\tau_n)=\textstyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Théorème 2.4.** (Réciproque au théorème 2.2).- *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $I$ un nombre réel tels que*

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\eta>0)\ (\forall(\sigma,\tau)\in\mathcal{S}_P)\quad (\delta(\sigma)<\eta\Longrightarrow|R(f,\sigma,\tau)-I|<\varepsilon).$$

*Alors $f$ est intégrable au sens de Riemann et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=I$.*

**Preuve**.- Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\eta>0$ tel que

$$\forall(\sigma,\tau)\in\mathcal{S}_P,\qquad(\delta(\sigma)<\eta\Longrightarrow|R(f,\sigma,\tau)-I|<\varepsilon/4).$$

Et donc tel que

$$\forall(\sigma,\tau)\in S_P,\ \forall(\sigma',\tau')\in\mathcal{S}_P,$$
$$(\delta(\sigma)<\eta\ \text{et}\ \delta(\sigma')<\eta\Longrightarrow|R(f,\sigma,\tau)-R(f,\sigma',\tau')|<\varepsilon/2).$$

Choisissons $\sigma=(x_i)_{0\le i\le n}\in\mathcal{S}$ de pas inférieur à $\eta$ (par exemple, $\sigma$ peut être une subdivision régulière). D'après la définition de l'inf (*resp.* du sup), pour tout $i\in\{1,\dots n\}$, il existe $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ (*resp.* $t_i'\in[x_{i-1},x_i]$) tel que

$$m_i(f,\sigma)\le f(t_i)<m_i(f,\sigma)+\frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$
$$(\textit{resp. } M_i(f,\sigma)-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<f(t_i')\le M_i(f,\sigma)).$$

On pose $\tau = (t_i)_{1\le i\le n}$ et $\tau' = (t'_i)_{1\le i\le n}$. On a

$$R(f,\sigma,\tau) - s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\,(f(t_i) - m_i(f,\sigma)) < \frac{\varepsilon}{4\,(b-a)} \sum_{i=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

De même

$$S(f,\sigma) - R(f,\sigma,\tau') < \varepsilon/4.$$

D'où

$$\begin{aligned} S(f,\sigma) - s(f,\sigma) &= S(f,\sigma) - R(f,\sigma,\tau') + |R(f,\sigma,\tau') - R(f,\sigma,\tau)| + R(f,\sigma,\tau) - s(f,\sigma) \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, le critère du théorème 1.5 est satisfait.□

## 3. Propriétés algébriques de l'intégrale de Riemann

Dans ce paragraphe, les théorèmes 3.1 et 3.2 sont démontrés à l'aide du du théorème 1.5. On laisse au lecteur le soin d'en établir des démonstrations d'ailleurs plus brèves à l'aide du théorème 2.4.

### 3.1. Relation de Chasles.

**Théorème 3.1.** *Soit* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *avec* $a < c < b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Sont équivalentes*
*i. La fonction* $f$ *est intégrable sur* $[a,b]$,
*ii. la fonction* $f$ *est intégrable sur* $[a,c]$ *et* $[c,b]$.
*De plus, si i. ou ii. est réalisé, on a*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

**Preuve**
$[i \Rightarrow ii]$ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable, $c \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\sigma \in \mathcal{S}\,[a,b]$ telle que

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon. \tag{3.2}$$

On peut supposer, quitte à l'ajouter, que $c \in \sigma$. (La relation (3.2) reste *a fortiori* vraie). La subdvision $\sigma$ s'écrit alors $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ de manière unique, où $\sigma_1 \in \mathcal{S}\,[a,c]$ et $\sigma_2 \in \mathcal{S}\,[c,b]$. On a $s(f,\sigma) = s(f,\sigma_1) + s(f,\sigma_2)$ et $S(f,\sigma) = S(f,\sigma_1) + S(f,\sigma_2)$ et

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) = (S(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_1)) + (S(f,\sigma_2) - s(f,\sigma_2))\,.$$

D'où, pour $i = 1$ et $i = 2$, $S(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_1) < \varepsilon$. Ainsi $f$ est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.
$[ii \Rightarrow i]$ : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$. On suppose $f$ intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. La fonction $f$ est bornée sur $[a,b]$ ce qui rend légitime la question d'intégrabilité. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\sigma_1 \in \mathcal{S}\,[a,c]$ et $\sigma_2 \in \mathcal{S}\,[c,b]$. telles que

$$S(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_1) < \varepsilon/2, \qquad S(f,\sigma_2) - s(f,\sigma_2) < \varepsilon/2.$$

La subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ de $[a,b]$ (formée des points de $\sigma_1$ et $\sigma_2$ rangés dans l'ordre croissant, $c$ étant écrit une seule fois) vérifie alors

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) = (S(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_1)) + (S(f,\sigma_2) - s(f,\sigma_2)) < \varepsilon.$$

Ainsi $f$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.
Pour prouver la relation (3.1), on considère une suite $(\sigma_{1,n},\tau_{1,n})_n$ (*resp.* $(\sigma_{2,n},\tau_{2,n})_n$) de subdivisions pointées de $[a,c]$ (*resp.* de $[c,b]$) de pas tendant vers 0. Alors $(\sigma_n,\tau_n)_n = (\sigma_{1,n} \cup \sigma_{2,n}, \tau_{1,n} \cup \tau_{2,n})_n$ constitue une suite de subdivisions pointées de $[a,b]$ de pas tendant vers 0, avec $R(f,\sigma_n,\tau_n) = R(f,\sigma_{1,n},\tau_{1,n}) + R(f,\sigma_{2,n},\tau_{2,n})$. Le corollaire 2.3 entraine l'existence des limites écrites ci dessous et la relation :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} R(f,\sigma_n,\tau_n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty} R(f,\sigma_{1,n},\tau_{1,n}) + \lim_{n\to+\infty} R(f,\sigma_{2,n},\tau_{2,n}) \\ &= \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$ □

**Exemple**.- On démontre ici le théorème 1.6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et $\sigma = (a_i)_{1\le i\le n} \in \mathcal{S}$ une subdivision adaptée à $f$, avec $f_{|]a_i,a_{i+1}[} = y_i$ $(0 \le i \le n)$.
D'après l'exemple 1.3 la fonction $f$ est intégrable sur $[a_{i-1}, a_i]$ pour tout $i \in \{1, \dots n\}$ avec $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t = (a_i - a_{i-1})\, y_i$. Une récurrence (finie) simple à partir du théorème 3.1 montre que $f$ est intégrable sur $[a,b]$ avec

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\, y_i.$$

**3.2. Linéarité de l'intégrale. Autres propriétés algébriques.**

**Théorème 3.2.** *L'ensemble $I([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions intégrables au sens de Riemann est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.*
*On a, en particulier, pour tout $(f,g) \in I([a,b],\mathbb{R})^2$ et $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

*Autrement dit, l'application $I([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire.*

**Preuve**.- Il suffit de prouver que $I([a,b],\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathrm{B}([a,b],\mathbb{R})$. L'ensemble $I([a,b],\mathbb{R})$ est non vide. Avec les notations de l'égalité (3.3), posons $h := \lambda f + \mu g$ et $M = \max(1, |\lambda|, |\mu|)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon/(2M), \quad S(g,\sigma) - s(g,\sigma) < \varepsilon/(2M).$$

Remarquons que (les notations sont celles de la définition 3)

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ M_i(h,\sigma) - m_i(h,\sigma) \le |\lambda|\,(M_i(f,\sigma) - m_i(f,\sigma)) + |\mu|\,(M_i(g,\sigma) - m_i(g,\sigma)).$$

D'où

$$\begin{aligned} S(h,\sigma) - s(h,\sigma) &\le |\lambda|\,(S(f,\sigma) - s(f,\sigma)) + |\mu|\,(S(g,\sigma) - s(g,\sigma)), \\ &\le |\lambda|\,\varepsilon/(2M) + |\mu|\,\varepsilon/(2M) < \varepsilon.\square \end{aligned}$$

Ainsi $h$ est intégrable. On prouve alors l'égalité (3.3) à l'aide d'une suite de subdivisions de pas tendant vers 0 (corollaire 2.3).

**Corollaire 3.3.** *Soit $f \in I([a,b],\mathbb{R})$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ne différant de $f$ qu'en un nombre fini de points. Alors $g$ est intégrable et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.*

**Preuve**.- En effet, la fonction $h := g - f$ est en escalier (nulle sauf en un nombre fini de points). D'après le théorème 1.6, elle est intégrable, d'intégrale nulle. Le théorème 3.2 entraine alors que $g$ est intégrable, avec

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Théorème 3.4.** *Soit $(f,g) \in I([a,b],\mathbb{R})^2$ alors $h := fg \in I([a,b],\mathbb{R})$.*

**Preuve**
*i*. On commence par supposer $f$ et $g$ à valeurs positives. Soit $\sigma = (x_i)_{0\le i\le n} \in \mathcal{S}$. Pour tout $(x,y) \in [x_{i-1}, x_i]^2$ $(1 \le i \le n)$ on a

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= g(x)\,(f(x) - f(y)) + f(y)\,(g(x) - g(y)), \\ &\le g(x)\,(M_i(f) - m_i(f)) + (M_i(g) - m_i(g)), \\ &\le M\,(M_i(f) - m_i(f) + M_i(g) - m_i(g)). \end{aligned}$$

où $M = \max\left(1, \sup_{\xi\in[a,b]} f(\xi), \sup_{\xi\in[a,b]} g(\xi)\right)$. Ainsi

$$M_i(h) - m_i(h) \le M\,(M_i(f) - m_i(f) + M_i(g) - m_i(g)).$$

Et

$$S(\sigma,h)-s(\sigma,h)\leq M\left(S(\sigma,f)-s(\sigma,f)\right)+M\left(S(\sigma,g)-s(\sigma,g)\right).$$

Pour $\varepsilon>0$, il existe $\sigma'\in\mathcal{S}$ telle que $S(\sigma',f)-s(\sigma',f)<\varepsilon/(2M)$ et $S(\sigma',g)-s(\sigma',g)<\varepsilon/(2M)$. Ainsi

$$S(\sigma',h)-s(\sigma',h)<\varepsilon.$$

La fonction $h$ est donc intégrable.

*ii*. On suppose de nouveau $f$ et $g$ de signes quelconques. On pose

$$M=\max\left(\sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)|,\sup_{\xi\in[a,b]}|g(\xi)|\right).$$

Les fonctions $f_1=M-f$ et $g_1=M-g$ s'écrivent comme différence de deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. D'après le théorème 3.2, elles sont intégrables sur $[a,b]$. Comme $f_1$ et $g_1$ sont de signe positif, leur produit est intégrable sur $[a,b]$ d'après $i$. Or

$$h=fg=(M-f_1)(M-g_1)=M^2-Mf_1-Mg_1+f_1g_1.$$

Dans cette expression, la fonction $x\mapsto M^2$ est intégrable (c'est une constante) les fonctions $Mf_1$ et $Mg_1$ le sont, d'après le théorème 3.2 : ainsi $h$ est intégrable sur $[a,b]$.□

Les théorèmes 3.2 et 3.4 entrainent le :

**Corollaire 3.5.** *L'ensemble* $I([a,b],\mathbb{R})$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre.*

## 4. Inégalités et égalités

### 4.1. Inégalités classiques

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a<b$.

**Proposition 4.1.** (Positivité de l'intégrale).- *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *intégrable sur l'intervalle* $[a,b]$. *On suppose que* $\forall x\in[a,b],\ f(x)\geq 0$. *Alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geq 0$.

**Preuve.**- Soit $f$ comme dans l'énoncé. Pour toute $\sigma=(x_i)_{0\leq i\leq n}\in S$ on a, avec les notations de la définition 3,

$$S(f,\sigma)=\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})M_i\geq 0.$$

D'où $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\inf_{\sigma\in\mathcal{S}}S(f,\sigma)\geq 0$.□

**Corollaire 4.2.** *Soit* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *intégrables sur l'intervalle* $[a,b]$. *On suppose que* $\forall x\in[a,b],\ f(x)\leq g(x)$ *alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leq\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Preuve.**- On applique la proposition 4.1 à la fonction $g-f$ et on utilise la linéarité de l'intégrale.□

**Corollaire 4.3.** (Inégalité de la moyenne).- *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *intégrable sur l'intervalle* $[a,b]$ *et* $m$ *et* $M$ *tels que* $\forall x\in[a,b],\ m\leq f(x)\leq M$. *Alors*

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leq M(b-a).$$

**Preuve.**- On applique le corollaire 4.2 à la fonction constante égale à $m$ et à $f$ puis à $f$ et à la fonction constante égale à $M$.□

**Proposition 4.4.** *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue *(donc intégrable) sur l'intervalle* $[a,b]$ *positive et non nulle en un point de* $[a,b]$. *Alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t>0$.

**Preuve.**- Soit $x_0$ tel que $f(x_0)>0$. Comme $f$ est continue, il existe un intervalle $[c,d]$ (avec $c<d$), voisinage (*resp.* voisinage à droite, à gauche) de $x_0$ si $x_0\in]a,b[$(*resp.* $x_0=a$, $x_0=b$) tel que

$$\forall x\in[c,d],\quad f(x)\geq f(x_0)/2.$$

(Appliquer la définition de la continuité avec $\varepsilon=f(x_0)/2$.)

La fonction $h$ en escalier définie par

$$\forall x \in [c,d]\,, \quad h(x) = f(x_0)/2, \qquad \forall x \in [a,b] \setminus [c,d]\,, \quad h(x) = 0$$

vérifie $h \leq f$. La fonction $h$, étant en escalier, est intégrable, avec

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(d-c)\,f(x_0)}{2} > 0.$$

En appliquant la proposition 4.2 aux fonctions $h$ et $f$ il vient

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t > 0.\square$$

**Théorème 4.5.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable. Alors $|f|$ est intégrable, avec*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f|\,(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Preuve.**- Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in S$. On a, pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$,

$$M_i(|f|\,, \sigma) = \max\left(|M_i(f,\sigma)|\,, |m_i(f,\sigma)|\right), \qquad m_i(|f|\,, \sigma) = \min\left(|M_i(f,\sigma)|\,, |m_i(f,\sigma)|\right).$$

D'où

$$\begin{aligned} M_i(|f|\,,\sigma) - m_i(|f|\,,\sigma) = ||M_i(f,\sigma)| - |m_i(f,\sigma)|| \leq |M_i(f,\sigma) - m_i(f,\sigma)| \\ = M_i(f,\sigma) - m_i(f,\sigma). \end{aligned}$$

Puis

$$S(|f|\,,\sigma) - s(|f|\,,\sigma) \leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma).$$

Le théorème 1.5 entraine l'intégrabilité de $|f|$. La majoration s'obtient à l'aide d'une suite $(\sigma_n, \tau_n)_n$ de subdivisions pointées de pas tendant vers 0 (corollaire 2.3) pour lesquelles on remarque que $|R(f, \sigma_n, \tau_n)| \leq R(|f|\,, \sigma_n, \tau_n)$.

### 4.2. Egalités de la moyenne

On rappelle (*cf.* ci dessus) que pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ et $m$ et $M$ tels que : $\forall x \in [a,b],\ m \leq f(x) \leq M$. on a

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a).$$

Si $f$ est continue, on peut préciser :

**Théorème 4.6.** (Forme simple du premier théorème de la moyenne).- *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable continue sur l'intervalle $[a,b]$ alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)(b-a).$$

**Preuve.**- En effet, $f$ étant continue, on a $f([a,b]) = [m,M]$ avec $m = \inf_{\xi \in [a,b]} f(\xi)$ et $M = \sup_{\xi \in [a,b]} f(\xi)$. L'inégalité de la moyenne entraine

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.\square$

**Théorème 4.7.** (Premier théorème de la moyenne).- *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[a,b]$ et soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable et de* signe constant *sur l'intervalle $[a,b]$. Il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

La **Preuve** s'inspire de celle du théorème 4.6. Supposons par exemple $g$ positive. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a

$$\forall t \in [a,b], \qquad mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t).$$

En utilisant le corollaire 4.2 il vient

$$m \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq M \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est nul, $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ l'est aussi et tout point $c \in ]a,b[$ convient. Sinon, on pose $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = I > 0$ et on remarque que $m \leq \frac{1}{I}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq M$. On achève alors, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, comme dans la preuve du théorème 4.6.□

On retrouve, d'ailleurs, le théorème 4.6 en faisant $g = 1$ dans 4.1.

Il est intéressant de rapprocher les énoncés des deux théorèmes de la moyenne, bien que la preuve, assez délicate, du deuxième nécessite des outils vus ultérieurement. (Le lecteur vérifiera l'absence de cercle vicieux.)
Voici un énoncé de ce deuxième théorème :

**Théorème 4.8.** (Deuxième théorème de la moyenne).- *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ positive et décroissante sur l'intervalle $[a,b]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. Il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t.$$

## 5. Applications : intégrales et primitives

### 5.1. Extension de la notion d'intégrale

Dans tout ce qui précéde, on considérait deux réels $a$ et $b$ tels que $a < b$. On propose ici les extensions suivantes :
*i.* Si $f$ est une fonction (à valeurs réelles) définie en un réel $a$ on pose $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
*ii.* Si $a$ et $b$ sont deux réels avec $a > b$ et $f$ définie un intervalle $I$ contenant $a$ et $b$. On dit que $f$ est intégrable (entre $a$ et $b$) si $f$ est intégrable sur $[b,a]$. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut étendre, de manière cohérente, des résultats précédents notamment ceux portant sur les propriétés algébriques. Par exemple, la relation de Chasles s'étend en :

**Théorème 5.1.** *Soit $(a,b,c)$ trois réels (rangés dans n'importe quel ordre) et*

$$f : [\min(a,b,c), \max(a,b,c)] \to \mathbb{R}$$

*intégrable. Alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

La **preuve** est laissée au lecteur.

En revanche, il faut faire attention avec les résultats d'inégalités. Par exemple, le théorème 4.5 devient le suivant, lorsqu'on ne précise pas $a < b$ :

**Théorème 5.2.** *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $f : [\min(a,b), \max(a,b)] \to \mathbb{R}$. intégrable. Alors $|f|$ est intégrable. On a de plus*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\right|.$$

**5.2. Applications intégrales**

Soit $I$ un intervalle réel non réduit à un point.

**Définition 8.** *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* localement intégrable *sur $I$ si elle est intégrable sur tout intervalle $[a,b]$ inclus dans $I$.*

**Exemple 5.1.** *Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue est localement intégrable sur $I$.*

En effet, la fonction $f$ est en particulier continue sur tout intervalle $[a,b]$ inclus dans $I$ : d'après le théorème 1.8, elle est intégrable sur $[a,b]$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ localement intégrable et $a \in I$. On dispose, avec l'extension du sens de l'intégrale donnée ci-dessus, de l'application

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Définition 9.** *L'application $F$ est appelée une* application intégrale *de $f$.*

**Proposition 5.3.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ localement intégrable sur $I$ et $a \in I$. L'application intégrale $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède les propriétés suivantes :*
*$i$. la fonction $F$ est continue sur $I$ ;*
*$ii$. Si $f$ est continue sur $[a,b]$ alors $F$ est dérivable $\mathrm{C}^1$ sur $I$ avec $F' = f$.*

**Preuve.**- Soit $x$ un point intérieur à $I$ et $\eta > 0$ tel que $[x-\eta, x+\eta] \subset I$.
$i$. Par hypothèse, $f$ est intégrable sur $[x-\eta, x+\eta]$ donc bornée sur cet intervalle. Posons

$$M = \sup_{\xi \in [x-\eta, x+\eta]} |f(\xi)|.$$

Soit $h$ tel que $|h| < \eta$. On a alors

$$|F(x+h) - F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_x^{x+h} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leq |h|\,M.$$

Ainsi, $\lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)$, et $F$ est continue en $x$.

$ii$. Soit $h \neq 0$ tel que $|h| < \eta$. Comme $f$ est continue sur $I$, le premier théorème de la moyenne entraine l'existence de $c_h \in [x - |h|, x + |h|]$ tel que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c_h).$$

Comme $f$ est continue, et que $\lim_{h\to 0} c_h = x$, on a $\lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$. D'où

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} (F(x+h) - F(x))/h = f(x).$$

Ainsi, $F$ est dérivable en $x$ de dérivée $f(x)$.
Si $x$ est un point frontière de $I$ (dans le cas ou cet intervalle est fermé ou semi fermé) on adapte les démonstrations précédentes pour montrer que $f$ est continue (*resp.* dérivable) à droite, ou à gauche en $x$. Enfin, pour le $ii$. la fonction $f$ étant supposée continue sur $I$, la fonction $F$ de dérivée $f$, est de classe $\mathrm{C}^1$.□

**5.3. Notion de primitive**

Soit $I$ un intervalle réel non réduit à un point.

**Définition 10.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Une* primitive *de $f$ est une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que*

$$\forall x \in I, \;\; g'(x) = f(x).$$

**Proposition 5.4.** *Si $f$ possède une primitive $g$ sur $I$ alors $g$ possède une infinité de primitives qui sont les fonctions $g + k$ où $k$ est une constante réelle.*

**Preuve.**- En effet, si $k \in \mathbb{R}$, on a $(g+k)' = g' = f$. Ainsi la fonction $g + k$ est bien une primitive de $f$. Réciproquement, $g_1$ et $g_2$ sont deux primitives de $f$ alors $h := g_1 - g_2$ est de dérivée nulle sur l'intervalle $I$. La fonction $h$ est donc constante sur $I$.□

**Corollaire 5.5.** *Soit* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *possédant une primitive. Alors il existe une et une seule primitive* $F$ *de* $f$ *telle que* $F(x_0) = y_0$.

En effet, $g$ étant une quelconque primitive de $f$, la fonction

$$I \to \mathbb{R} \qquad x \longmapsto g(x) - g(x_0) + y_0$$

convient et c'est la seule.□

Le paragraphe précédent donne un exemple d'existence de primitive :

**Proposition 5.6.** *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue. La fonction*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

*est la primitive de* $f$ *sur l'intervalle* $[a, b]$ *(prenant la valeur* $0$ *en* $a$*).*

En effet, d'après la proposition 5.3 $F$ est de classe $\mathrm{C}^1$ de dérivée $f$.□

### 5.4. Théorème fondamental

On considère dans ce paragraphe de nouveau de $f$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Enoncons le résultat suivant, parfois appelé **théorème fondamental du calcul intégral** :

**Théorème 5.7.** *Soit* $a$ *et* $b$ *deux réels et* $f : [\min(a, b), \max(a, b)] \to \mathbb{R}$ *intégrable. Si* $f$ *admet comme primitive* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

**Notation**.- On pose $[F(t)]_a^b := F(b) - F(a)$.

**Preuve**.- On suppose $a < b$, l'autre cas s'en déduisant immédiatement.
*i*. Si on suppose $f$ continue sur $[a, b]$, le théorème est une conséquence de la proposition 5.6.
*ii*. Dans le cas général, on va exprimer $F(b) - F(a)$ à l'aide de sommes de Riemann. Soit $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left((x_i^n)_{0 \le i \le m(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de subdivisions de $[a, b]$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \delta(\sigma_n) = 0$. D'après le corollaire 2.3 on a $\lim_{n \to +\infty} R(f, \sigma_n, \tau_n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, pour tout choix de $\tau_n$ faisant de $(\sigma_n, \tau_n)$ une subdivision pointée de $[a, b]$.
Le théorème de Rolle, appliqué à $F$ continue et de dérivée $f$ sur les intervalles de subdivisions $\left[x_{i-1}^n, x_i^n\right]$, entraine que

$$\forall n \in N, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \exists t_i^n \in \left]x_{i-1}^n, x_i^n\right[, \qquad F(x_i^n) - F\left(x_{i-1}^n\right) = f(t_i^n)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right).$$

Alors

$$\forall n \in N, \quad F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{m(n)} \left(F(x_i^n) - F\left(x_{i-1}^n\right)\right) = \sum_{i=1}^{m(n)} \left(x_i^n - x_{i-1}^n\right) f(t_i^n)$$
$$= R(f, \sigma_n, \tau_n),$$

où l'on a posé, pour tout $n$, $\tau_n = (t_i^n)_{1 \le i \le m(n)}$
Comme $\lim_{n \to +\infty} R(f, \sigma_n, \tau_n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, il vient

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

### 5.5. Formule d'intégration par parties

Soit $a$ et $b$ deux réels.

**Proposition 5.8.** *Soit* $f, g : [\min(a, b), \max(a, b)] \to \mathbb{R}$ *dérivables et telles que* $f'$ *et* $g'$ *soient intégrables sur* $[a, b]$

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

**Preuve**.- Posons $\alpha = \min(a, b)$, $\beta = \max(a, b)$. La fonction $f$ (*resp.* $g$), continue, est intégrable sur $[\alpha, \beta]$ ainsi que $g'$ (*resp.* $f'$) par hypothèse. Alors la fonction $fg'$ (*resp.* $fg'$) est intégrable sur $[\alpha, \beta]$, d'après le théorème 3.4. De plus, on a $(fg)' = f'g + fg'$. Ainsi $fg$ est une primitive de $f'g + fg'$. Le théorème 5.7 entraine que

$$\int_a^b \left(f(t)g'(t) + f'(t)g(t)\right)\,\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

On conclut en utilisant la linéarité de l'intégrale (théorème 3.2).□

## 6. Cas des fonctions à valeurs complexes

### 6.1. Définition

On considède ici le cas des fonctions définies sur un intervalle réel $I$ (non réduit à un point) et à valeurs complexes.
Soit $f \in \mathrm{B}(I, \mathbb{C})$. On définit les fonctions $R_f$ et $I_f$ sur $I$ par

$$\forall x \in I, \quad R_f(x) = \mathrm{Re}(f(x)), \quad I_f(x) = \mathrm{Im}(f(x)).$$

**Définition 11.** *Soit $a$ et $b$ deux réels et $f : [\min(a,b), \max(a,b)] \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est intégrable si les fonctions à valeurs réelles $R_f$ et $I_f$ sont intégrables sur. On pose alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b R_f(f(t))\,\mathrm{d}t + i \int_a^b I_f(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

### 6.2. Propriétés

Les résultats des paragraphes précédents qui ne font pas intervenir de manière essentielle les propriétés particulières de $\mathbb{R}$ liées à l'ordre se transposent au cas envisagé ici. Ainsi, notamment :

*i.* Les *fonctions en escalier* définies sur $[a, b]$ à valeurs complexes (on laisse au lecteur le soin d'écrire la définition), les *fonctions continues* définies sur $[a, b]$ sont intégrables sur $[a, b]$.

*ii.* La caractérisation des fonctions intégrables par les sommes de Riemann (théorèmes 2.2 et 2.4) reste valide.

*iii.* Les propriétés algébriques restent vraies : ainsi relation de Chasles reste valide, l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$ à valeurs complexes forme une $\mathbb{C}$-algèbre.

*iv.* La section ‹‹ applications intégrales et primitives › › peut être transposée *mutatis mutandis* au cas complexe. (Les preuves des résultats peuvent nécessiter des adapations.)

*v.* Enfin, la section ‹‹ inégalités et égalités › › est largement spécifique au cas réel. Cependant, on dispose du résultat suivant :

**Théorème 6.1.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $f : [\min(a, b), \max(a, b)] \to \mathbb{C}$ intégrable. Alors $|f|$ est intégrable. On a de plus*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\right|.$$

**PLC1-Mathématiques**
**Auteur : A. Delcroix**

Quelques
EQUATIONS FONCTIONNELLES
Classiques

## 1. Introduction : un problème difficile

Les équations fonctionnelle figurent parmi les problèmes difficiles des mathématiques. On présente ci-dessous trois exemples classiques qui sont tous susceptibles de figurer dans un problème écrit ou dans un programme d'oral de concours :

- équations fonctionnelle des fonctions logarithmes : $f(xy) = f(x) + f(y)$,
- équations fonctionnelle des fonctions exponentielles : $f(x+y) = f(x)f(y)$,
- équations fonctionnelle des fonctions puissances : $f(xy) = f(x)f(y)$,

avec des hypothèses précisées dans le document.

Aux difficultés de ce problème s'ajoute, pour un concours, le choix du niveau de l'exposé, ce qu'on illustre ci-dessous dans les cas des fonctions logarithmes et des fonctions exponentielles par trois énoncés successifs.

- Le premier est du niveau d'un problème de recherche. Il est donné à titre culturel et pour mettre en exergue la difficulté du problème mathématique.
- Le second repose sur des hypothèses trop fortes (dérivabilité supposée *a priori*) pour en faire un exposé riche.
- Le troisième présente le compromis ‹ ‹standard››. Il semble correspondre aux attentes du jury du CAPES externe.

Pour chaque équation fonctionnelle on a présenté au moins deux démonstrations des résultats.

- Les premières démonstrations reposent sur les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue et plus précisement des applications intégrales du type $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Elles font appel essentiellement aux propriétés de la fonction que l'on traite : logarithme (*resp.* exponentielle), pour l'équation fonctionnelle du logarithme (*resp.* de l'exponentielle). C'est aussi le cas de la variante proposée dans le cas de l'exponentielle.
- Les deuxièmes démonstrations utilisent la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- Les troisièmes démonstrations ramènent le problème à celui de l'étude d'une nouvelle équation fonctionnelle, la plus simple puisqu'elle caractérise les fonctions linéaires :

  $$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (f \text{ est supposée continue en un point})$$

  Le reproche qu'on pourra faire à ces deuxièmes démonstrations et de nécessiter en pré requis la fonction exponentielle (*resp.* logarithme) pour traiter de l'équation fonctionnelle du logarithme(*resp.* de l'exponentielle).

Il s'agit de présenter une des approches, celle avec laquelle on se sent le plus à l'aise, sans ignorer que d'autres sont possibles. Le lecteur n'oubliera pas également d'adapter les pré requis à l'approche qu'il développe.

## 2. L'Equation fonctionnelle du logarithme

### 2.1. Introduction : énoncé d'un problème général

Un premier énoncé du problème serait :

**Problème 2.1.** *Déterminer les fonctions numériques $f$ et (donc) leur ensemble de définition $I$ qui vérifient*

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad xy \in I, \tag{2.1}$$

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad f(xy) = f(x) + f(y) \tag{2.2}$$

Enoncé ainsi, le problème est correct mais très difficile puisque qu'on n'impose aucune régularité *a priori* sur la fonction $f$ et l'ensemble $I$.

On peut donc imposer à l'ensemble $I$ d'être un intervalle (d'intérieur non vide), ou une réunion d'intervalles. Il faut alors caractériser les intervalles réels vérifiant la propriété (2.1). Par exemple, les intervalles $]-\alpha, \alpha[$ ou $[-\alpha, \alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$ conviennent. En revanche, si $I$ contient un point $x > 1$ alors $I$ contient la demi-droite $[x, +\infty[$, puisque les termes de la suite $(x^n)_{n\geq 1}$, non bornée, habitent $I$.
Ceci justifie amplement de choisir *a priori* $I = ]0, +\infty[$.

### 2.2. Un problème restreint

Le problème suivant qui repose sur une hypothèse de dérivabilité de la fonction satisfaisant l'équation fonctionnelle est ici pour mettre en place un premier exemple simple. Cette formulation est cependant trop limitée pour faire une leçon riche d'oral de CAPES externe.

**Problème 2.2.** *Déterminer les fonctions numériques $f$ définies et dérivables sur $]0, +\infty[$ telles que*

$$\forall (x,y) \in ]0, +\infty[^2, \quad f(xy) = f(x) + f(y). \tag{2.3}$$

**Remarque.**- Cette relation fonctionnelle impose $f(1) = 0$.
En effet, pour $x = y = 1$, on a $f(1) = 2f(1)$. D'où le résultat.

**Lemme 2.3.** *Si la fonction $f$ n'est pas la fonction nulle, alors la fonction $f$ ne peut être prolongée en 0 (i.e. en une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle sur $[0, +\infty[$).*

**Preuve.**- On démontre la contraposée : supposons $f$ prolongeable en 0. Alors d'après la relation fonctionnelle (2.3) appliquée pour $y = 0$, on a

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(0) = f(x) + f(0).$$

D'où : $\forall x \in ]0, +\infty[ \ f(x) = 0$.

**Remarque.**- Ce lemme justifie *a posteriori* le choix de $I = ]0, +\infty[$.

**Théorème 2.4.** *Une fonction numérique $f$ définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ vérifie l'équation fonctionnelle (2.3) si, et seulement si, il existe $k$, constante réelle, telle que*

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = k \ln x, \tag{2.4}$$

*autrement dit $f$ est soit la fonction nulle, soit une fonction logarithme.*

**Preuve.**
*i.* En raison des propriétés de la fonction logarithme, une fonction vérifiant l'égalité (2.4) satisfait clairement la relation fonctionnelle (2.3).
*ii.* Réciproquement, soit $f$ satisfaisant la relation fonctionnelle (2.3). On a alors, en dérivant cette relation par rapport à $y$,

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \ \forall y \in ]0, +\infty[, \quad xf'(xy) = f'(y).$$

D'où, en particulier, pour $y = 1$,

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad xf'(x) = f'(1).$$

Alors :

- si $f'(1) = 0$, on a : $\forall x \in ]0, +\infty[, \ f(x) = f(1) = 0$ (d'après la remarque initiale sur $f(1)$) ;
- si $f'(1) \neq 0$, il vient

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) - f(1) = f(x) = f'(1) \int_1^x (1/t) \mathrm{d}t = f'(1) \ln x.$$

D'où la conclusion avec $k = f'(1)$.

### 2.3. Un problème raisonnablement ambitieux

Le problème précédent suppose *a priori* une régularité assez forte de la fonction $f$ cherchée : on peut prendre des hypothèses plus faibles, qui conduisent à des raisonnements d'analyse plus subtils. Nous donnons deux démonstrations, d'esprits sensiblement différents.
Il faudra donc penser à adapter les pré-requis en fonction de la démonstration choisie.

#### 2.3.1. Notion requises (les pré-requis des oraux du CAPES)

On suppose acquises les notions suivantes.

- Notions sur l'étude des fonctions : limite, continuité dérivablité.
- Intégrale des fonctions continues. Régularité de l'application intégrale $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ (pour la première démonstration du théorème 2.6).
- Les fonctions logarithmes : étude, propriétés de base.
- La fonction exponentielle : propriétés de base, la fonction ln est réciproque de la fonction exponentielle (pour la deuxième démonstration du théorème 2.6).

#### 2.3.2. Le problème et le résultat

**Problème 2.5.** *Déterminer les fonctions numériques $f$ définies sur $]0,+\infty[$ et continues en au moins un point de $I$ telles que*

$$\forall (x,y) \in ]0,+\infty[^2, \qquad f(xy) = f(x) + f(y). \tag{2.5}$$

La caractérisation est la même que sous les hypothèses fortes.

**Théorème 2.6.** *Une fonction numérique $f$ définie sur $]0,+\infty[$ continue en au moins un point de $]0,+\infty[$ vérifie l'équation fonctionnelle (2.5) si et seulement si il existe $k$, constante réelle, telle que*

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \qquad f(x) = k \ln x\,.$$

### 2.4. Démonstrations du théorème 2.6

#### 2.4.1. Une première démonstration (utilisant les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue)

La fonction nulle et les fonctions logarithmes vérifiant clairement l'équation fonctionnelle, il reste à montrer que la condition est nécessaire.
On procède en trois étapes, en remarquant tout d'abord comme ci-dessus que l'équation fonctionnelle (2.5) impose $f(1) = 0$.

***La fonction $f$ est continue sur*** $]0,+\infty[$.
Soit $x_0$ un point de $]0,+\infty[$ où la fonction $f$ est continue. Soit $x \in ]0,+\infty[$ quelconque et $h$ un réel tel que $x+h \in ]0,+\infty[$. On a

$$f(x+h) = f(x(1+h/x)) = f\left((x/x_0)(1+h/x)x_0\right) = f(x/x_0) + f((1+h/x)x_0)\,.$$

La fonction $h \mapsto (1+h/x)x_0$, définie sur un voisinage de $x_0$, est continue en $h=0$ et prend en ce point la valeur $x_0$. Comme la fonction $f$ est continue en $x_0$ on a par composition $\lim_{h\to 0} f((1+h/x)x_0) = f(x_0)$. D'où enfin, $\lim_{h\to 0}\ f(x+h) = f(x/x_0) + f(x_0) = f(x)$.

***La fonction $f$ est dérivable sur*** $]0,+\infty[$.
En intégrant l'équation fonctionnelle (2.5) par rapport à $y$, il vient

$$\forall (x,y) \in ]0,+\infty[^2\,, \qquad \int_1^y f(xt)\mathrm{d}t = f(x)(y-1) + \int_1^y f(t)\mathrm{d}t\,.$$

D'où, en effectuant le changement de variables $u = xt$ dans la première intégrale,

$$\forall (x,y) \in ]0,+\infty[^2\,, \qquad (1/x)\int_x^{xy} f(u)\mathrm{d}u = f(x)(y-1) + \int_1^y f(t)\mathrm{d}t\,.$$

On fixe désormais $y$ différent de 1 et on pose $\alpha = \int_1^y f(t)\mathrm{d}t$. On a donc l'égalité

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \qquad (y-1)f(x) = (1/x)\int_x^{xy} f(u)\mathrm{d}u - \alpha. \tag{2.6}$$

Les fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto \int_x^{xy} f(u)\mathrm{d}u$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$, cette dernière comme ‹‹ fonction des bornes ››, puisque $f$ est continue sur $]0,+\infty[$. La fonction $f$ est donc dérivable sur $]0,+\infty[$.

***La fonction $f$ est soit la fonction nulle, soit une fonction logarithme***

**Première méthode.-** On procède comme pour la preuve du théorème 2.4.

**Deuxième méthode.-** On poursuit à l'aide de la relation intégrale (2.6) ci-dessus. Cette relation s'écrit

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \quad (y-1)xf(x) = F(xy) - F(x) - \alpha x,$$

où $F$ est une primitive de $f$. En dérivant, il vient (on rappelle que $y$ est fixé!)

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \quad (y-1)xf'(x) + (y-1)f(x) = yf(xy) - f(x) - \alpha = (y-1)f(x) + yf(y) - \alpha.$$

On en déduit

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \quad (y-1)xf'(x) = yf(y) - \alpha.$$

En posant $k = (yf(y)-\alpha)/(y-1)$, on obtient l'équation

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \quad f'(x) = k/x.$$

- Si $k = 0$, on a : $\forall x \in ]0,+\infty[, \;\; f(x) = f(1) = 0$ (d'après la remarque initiale sur $f(1)$).
- Si $k \neq 0$, il vient

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \quad f(x) - f(1) = \; f(x) = k\int_1^x (1/t)\mathrm{d}t = k\ln(x).$$

D'où le résultat.□

**2.4.2. Une deuxième démonstration, utilisant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$)**

Cette démonstration du théorème 2.6 commence comme celle développée ci dessus :

- on remarque d'abord que les fonctions logarithmes vérifient l'équation fonctionnelle (2.5).
- il reste à montrer que la condition est nécessaire.

Soit donc $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue en un point de $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant l'équation fonctionnelle (2.5).

***La fonction $f$ est continue sur $]0,+\infty[$.*** *Voir la démonstration ci-dessus.*

***La fonction $g := f \circ \exp$ satisfait l'équation fonctionnelle $g(x+y) = g(x) + g(y)$.***

**Lemme 2.7.** *Soit $f$ définie, continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant l'équation fonctionnelle 2.5. Alors la fonction $g := f \circ \exp$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$ et satisfait l'équation fonctionnelle*

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

**Preuve**.
La fonction exp, définie sur $\mathbb{R}$, est à valeurs strictement positives ce qui assure la définition de la fonction $f$. De plus la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de composition, $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(\exp(x+y)), \\ &= f(\exp(x)\exp(y)) \quad \text{(Propriété fonctionelle de l'exponentielle)}, \\ &= f(\exp(x))\, f(\exp(y)) \quad \text{(Propriété fonctionelle de } f\text{)}, \\ &= g(x) + g(y).\square \end{aligned}$$

**Lemme 2.8.** *Soit $g$ définie sur $\mathbb{R}$, continue en un point de $\mathbb{R}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *$g$ satisfait l'équation fonctionnelle*

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \tag{2.7}$$

2. *il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = kx.$$

Autrement dit, les applications continues (en au moins un point) satisfaisant l'équation fonctionnelle (2.7) sont les applications linéaires.

**Première preuve du lemme 2.8**.- Elle repose notamment sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

$i$. On a nécessairement $g(0) = 0$.
En effet, $g(0) = g(0) + g(0) = 2g(0)$. D'où $g(0) = 0$.

$ii$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g(n) = ng(x)$.
On procède par récurrence, le pas initial étant le $i$. ci-dessus. Soit alors $n \geq 0$ et on suppose que $g(n) = ng(x)$. On a

$$g\left((n+1)\,x\right) = g\left((n+1)\,x\right) = g(nx) + g(x) = ng(x) + g(x) = (n+1)g(x).$$

$iii$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $g(n) = ng(x)$.
En effet de manière plus générale on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(-y) = -g(y),$$

puisque $g(0) = g(y + (-y)) = g(y) + g(-y)$. D'où, en particulier, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$g(-nx) = -g(nx) = -ng(x).$$

$iv$. Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $g(r) = rg(1)$.
En effet, soit $r = p/q \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\text{a. } \; g(p/q) = pg(1/q)\;; \qquad \text{b. } \; qg(1/q) = g(1).$$

D'où $g(1/q) = (1/q)\,g(1)$ puis $g(p/q) = (p/q)\,g(1) = rg(1)$.

$v$. La fonction $g$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
En effet, soit $x_0$ en lequel $g$ est continue. On a, pour $(x,h) \in \mathbb{R}^2$,

$$g\left(x+h\right) = g\left((x-x_0) + (x_0+h)\right) = g\left(x-x_0\right) + g\left(x_0+h\right).$$

Comme $\lim_{h\to 0} g\left(x_0+h\right) = g\left(x_0\right)$, il vient $\lim_{h\to 0} g\left(x+h\right) = g\left(x-x_0\right) + g\left(x_0\right) = g(x)$. Ainsi $g$ est continue en $x$.

$vi$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = xg(1)$.
Soit en effet une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tendant vers $x$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(r_n) = r_n g(1).$$

On a, par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} r_n g(1) = xg(1)$. Comme $g$ est continue en $x$ on a $\lim_{n\to+\infty} g(r_n) = g(x)$. Ainsi $g(x) = xg(1)$. On pose $k = g(1)$.□

On peut maintenant achever la démonstration du théorème 2.6. D'après le lemme 2.7, $g = f \circ \exp$ satisfait l'équation fonctionnelle 2.7. D'après le lemme 2.8, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad kx = f \circ \exp(x).$$

Soit $k$ est nul et $f$ est nulle (ceci découlant de la surjectivité de exp). Soit $k$ est non nul. Alors $(1/k)f$ est la fonction réciproque de exp. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = k\ln(x).\square$$

**Remarques**

1. Dans cette approche on utilise la fonction exponentielle pour étudier l'équation fonctionnelle de la fonction logarithme. Ceci peut être considéré comme un défaut. Au minimum, il faut préciser ce point en pré requis.

2. Dans l'organisation des démonstrations, on peut dans un exposé d'oral démontrer la continuité de $f$. La fonction $g = f \circ \exp$ est alors continue, ce qui permet de démontrer une variante simplifiée du lemme 2.8 dans laquelle on fait l'hypothèse de continuité de $g$ sur $\mathbb{R}$. On fait ainsi l'économie du point $v$ de la preuve de ce lemme.

3. Le passage du point $v.$ au point $vi.$ dans la démonstration du lemme 2.8 constitue un cas particulier d'une propriété plus générale, démontrée plus loin pour l'équation fonctionnelle de l'exponentielle : soit $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions définies et continues sur le même intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Si les restrictions à $\mathbb{Q} \cap I$ de $\varphi$ et de $\psi$ sont égales, alors $\varphi$ et $\psi$ sont égales.

4. On peut donner une démonstration plus brève du lemme 2.8 basée sur des arguments similaires à ceux de la première démonstration du théorème 2.6, c'est-à-dire utilisant notamment les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue. On donne cette preuve ci-dessous.

**Deuxième preuve du lemme** 2.8
On démontre d'abord, comme en $v.$ ci-dessus que $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
En intégrant alors l'équation fonctionnelle (2.7) par rapport à $y$ il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^y g(x+t)\mathrm{d}t = yg(x) + \int_0^y g(t)\mathrm{d}t\,.$$

D'où, en effectuant le changement de variable $u = x + t$ dans la première intégrale

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad yg(x) = \int_0^y g(t)\mathrm{d}t - \int_0^{x+y} g(u)\mathrm{d}u.$$

En fixant $y$, par exemple $y = 1$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t - \int_0^{x+1} g(u)\mathrm{d}u. \tag{2.8}$$

La fonction $x \mapsto \int_0^{x+1} g(u)\mathrm{d}u$ est dérivable puisque $g$ est continue. Ainsi $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
En dérivant l'équation fonctionnelle 2.7 par rapport à $y$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x+y) = g'(y).$$

En faisant $y = 0$ dans l'égalité ci dessus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = g'(0)$. Ainsi $g'$ est constante : il existe $(k, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = kx + c.$$

Comme $g(0) = 0$, on a $c = 0$ et finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = kx.\square$

## 3. L'Equation fonctionnelle de l'exponentielle

On présente, comme pour le logarithme, le problème en trois étapes : sa formulation générale, un problème restreint et enfin un problème raisonnable dans le cadre d'une leçon de CAPES.

### 3.1. Le problème général

On peut énoncer le problème ainsi :

**Problème 3.1.** *Déterminer les fonctions numériques $f$ (et donc leur ensemble de définition $I$) qui vérifient*

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x + y \in I, \tag{3.1}$$

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y). \tag{3.2}$$

Le problème ainsi énoncé est très général, puisque l'on impose aucune régularité sur l'ensemble $I$ et sur la fonction $f$ et dépasse le cadre d'une leçon d'oral du CAPES. Le corps $\mathbb{R}$ étant (en particulier !) stable par l'addition, on se contentera de chercher les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle (3.2).

### 3.2. Un problème restreint

On cherche les fonctions *dérivables* sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle (3.2). On dispose alors du résultat :

**Théorème 3.2.** *Une fonction numérique $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie l'équation fonctionnelle (3.2) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vraie :*
*1. $f$ est la fonction nulle ;*
*2. il existe $a$, constante réelle positive telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x$.*

**Preuve.-** On remarque d'abord la fonction nulle et les fonctions exponentielles de base quelconque vérifient l'équation fonctionnelle (3.2). Il reste donc à vérifier que la condition est nécessaire.

Soit donc $f$ définie et dérivable sur sur $\mathbb{R}$ et vérifiant (3.2).

*1. Si $f$ s'annule en un point alors $f$ est la fonction nulle.*
Supposons en effet qu'il existe $x_0$ tel que $f(x_0) = 0$. Soit alors $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après l'équation fonctionnelle : $f(x) = f(x_0 + x - x_0) = f(x_0)f(x - x_0) = 0$.

*2. Si $f$ ne s'annule pas, $f$ est une fonction exponentielle.*
On suppose désormais que $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) > 0.$$

Donc $f$ est à valeurs strictement positives. En particulier l'équation fonctionnelle impose $f(0) = (f(0))^2$. D'où, puisque $f$ ne s'annule pas, $f(0) = 1$.

En dérivant l'équation fonctionnelle par rapport à $y$ il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x + y) = f(x)f'(y).$$

En particulier pour $y = 0$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}^2, \;\; f'(x) = f(x)f'(0)$.
La fonction $f$ est donc solution de l'équation différentielle $y' - f'(0)y = 0$.
D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0)\mathrm{e}^{f'(0)x}.$$

Comme $f(0) = 1$, il vient, en posant $a = \mathrm{e}^{f'(0)} \geq 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x.\square$$

**Remarque**.- Si $a$ est égal à 1, $f$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

### 3.3. Un problème raisonablement général

Cet énoncé est motivé par les mêmes raisons que pour les fonctions logarithmes : se donner un niveau de difficulté raisonnablement ambitieux, pour montrer une bonne maîtrise des raisonnements de base d'analyse.

#### 3.3.1. Notion requises (les Pré-requis des oraux du CAPES)

On suppose acquises les notions suivantes.

- Notions sur l'étude des fonctions : limite, continuité dérivablité.
- Intégrale des fonctions continues. Régularité de l'application intégrale $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Les fonctions exponentielles de base $a$.
- Résolution de l'équation différentielle $y' - by = 0$ (pour la première démonstration proposée).
- Propriété de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (pour la troisième démonstration proposée).
- La fonction logarithme néperien : propriétés de base, la fonction ln est réciproque de la fonction exponentielle (pour la deuxième démonstration du théorème 3.4).

#### 3.3.2. Le problème et le résultat

Voici donc le problème posé :

**Problème 3.3.** *Déterminer les fonctions numériques $f$ définies sur $\mathbb{R}$ et continues en au moins un point de $\mathbb{R}$ telles que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y). \tag{3.3}$$

Comme pour le cas de l'équation fonctionnelle du logarithme, la caractérisation est la même que sous les hypothèses fortes.

**Théorème 3.4.** *Une fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ continue en un point de $\mathbb{R}$ vérifie l'équation fonctionnelle (3.3) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vraie :*
*1. $f$ est la fonction nulle ;*
*2. il existe $a$, constante réelle positive telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x$.*

### 3.4. Trois démonstrations du théorème 3.4

#### 3.4.1. Première démonstration (utilisant notamment les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue et l'équation différentielle $y' - by = 0$)

Comme dans le théorème 3.2 on vérifie que la condition est nécessaire. On procède en quatre étapes.

***Si $f$ s'annule en un point alors $f$ est la fonction nulle.*** Voir preuve du théorème 3.2.

*On se place donc dans la suite dans le cas où $f$ ne s'annule pas. Elle est alors à valeurs strictement positives et vérifie $f(0) = 1$.*

***La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.***
Soit $x_0$ un point de $\mathbb{R}$ où la fonction $f$ est continue. Soit $x$ et $h$ deux réels quelconques. On a

$$f(x+h) = f(x_0 + h + x - x_0) = f(x_0 + h)f(x - x_0).$$

Comme la fonction $f$ est continue en $x_0$, on a $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. D'où $\lim_{h\to 0}\ f(x+h) = f(x_0)f(x - x_0) = f(x)$.

***Lorsque $f$ ne s'annule pas $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$***
Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer l'équation fonctionnelle (3.3) par rapport à $y$. Il vient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_0^y f(x+t)\mathrm{d}t = f(x)\int_0^y f(t)\mathrm{d}t.$$

D'où, en effectuant le changement de variables $u = x + t$ dans la première intégrale,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_x^{x+y} f(u)\mathrm{d}u = f(x)\int_0^y f(t)\mathrm{d}t.$$

On fixe désormais $y$ différent de 0 (par exemple $y = 1$) et on pose $\alpha = \int_0^y f(t)\mathrm{d}t$, quantité strictement positive (comme intégrale d'une fonction continue strictement positive). Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle possède des primitives de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Si $F$ désigne l'une d'entre elles, on a l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha f(x) = F(x+y) - F(x), \tag{3.4}$$

qui prouve que $f$ est elle même dérivable, comme somme de fonctions dérivables.

***Lorsque $f$ ne s'annule pas, $f$ est une fonction exponentielle***

***Première méthode*** On est ramené au point 2. de la preuve du théorème 3.2.

***Deuxième méthode*** On poursuit le raisonnement ci-dessus : en dérivant l'expression (3.4), il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha f'(x) = f(x+y) - f(x) = f(x)f(y) - f(x) = f(x)[f(y) - 1].$$

Notons $b = [f(y) - 1]/\alpha$. L'équation différentielle vérifiée sur $\mathbb{R}$ par $f$ s'écrit alors

$$y' - by = 0.$$

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = f(0)\mathrm{e}^{bx}$. Comme $f(0) = 1$, il vient, en posant $a = \mathrm{e}^b$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = a^x$.□

#### 3.4.2. Deuxième démonstration (utilisant la fonction $\ln$ et l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$)

Comme dans les démonstrations ci-dessus, on vérifie que la condition est nécessaire. On procède comme ci-dessus pour montrer que si $f$ s'annule en un point alors $f$ est la fonction nulle. On se place donc dans la suite dans le cas où $f$ ne s'annule pas. Elle est alors à valeurs strictement positives et vérifie $f(0) = 1$.
On a alors :

**Lemme 3.5.** *Soit $f$ définie, continue en un point de $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle (3.3). Alors la fonction $g := \ln \circ f$ est définie, continue en un point de $\mathbb{R}$ et satisfait l'équation fonctionnelle*

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

**Preuve**.
La fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$, est à valeurs strictement positives ce qui assure la définition de la fonction $g = \ln \circ f$. Soit $x \in \mathbb{R}$ en lequel $f$ est continue. La fonction ln, continue sur $\mathbb{R}_*^+$, est continue en $f(x)$. D'après le théorème de composition, $g$ est continue en $x$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln\left(f\left(x+y\right)\right), \\ &= \ln\left(f\left(x\right)f\left(y\right)\right) \quad \text{(Propriété fonctionelle de } f\text{)}, \\ &= \ln\left(f\left(x\right)\right) + \ln\left(f\left(y\right)\right) \quad \text{(Propriété fonctionelle du logarithme)}, \\ &= g(x) + g(y). \square \end{aligned}$$

Le lemme 2.8 entraine alors l'existence de $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad kx = \ln \circ f(x).$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(kx) = \exp(x \ln a) = a^x,$$

avec $a = \exp k$.$\square$

### 3.4.3. Troisième démonstration (utilisant notamment la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Cette démonstration est dans l'esprit de la première démonstration du lemme 2.8.
Comme dans la première démonstration du théorème 3.4, on vérifie que la condition est nécessaire. On procède en quatre étapes principales.

***Si $f$ s'annule en un point alors $f$ est la fonction nulle.*** Voir preuve du théorème 3.2.

*On se place donc dans la suite dans le cas où $f$ ne s'annule pas. Elle est alors à valeurs strictement positives et vérifie $f(0) = 1$. On pose f(1)=a.*

***La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.*** Voir première démonstration.

***Pour tout entier relatif $n$ on a :*** $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(nx) = f(x)^n$.
En effet, une récurrence simple, à partir de l'équation fonctionnelle, montre que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; f(n) = f(x)^n$. L'équation fonctionnelle entraine ensuite, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(0) = 1 = f(y - y) = f(y)f(-y).$$

D'où : $\forall y \in \mathbb{R}, \; f(-y) = f(y)^{-1}$, ce qui permet de conclure pour les entiers négatifs.

***Pour tout rationnel $r$ on a*** $f(r) = f(1)^r = a^r$.
En effet, si $r = p/q$ (avec $q \in \mathbb{N}^*$), on a $f(p) = f(q\frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q})^q = f(r)^q$. D'où $f(r) = f(p)^{1/q}$. Comme $f(p) = f(1)^p$, il vient $f(r) = f(1)^{p/q}$.

***Pour tout réel $x$ on a*** $f(x) = a^x = \exp(x \ln a)$.
On remarque que la fonction $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a(x) = \exp(x \ln a)$ vérifie pour tout $r$ rationnel $\exp_a(r) = a^r$. Donc les fonctions $f$ et $\exp_a$ sont continues et coïncident sur le corps des rationnels. Or :

**Lemme 3.6.** *Soient $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, égales en tout point rationnel. Alors $\varphi$ et $\psi$ sont égales.*

*Preuve du lemme.*- Soit en effet $x$ un réel et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers $x$. Les fonctions $\varphi$ et $\psi$ étant continues, on a $\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(r_n)$, et $\psi(x) = \lim_{n\to+\infty} \psi(r_n)$. Comme $\varphi$ et $\psi$ coïncident sur les rationnels, on a $\varphi(r_n) = \psi(r_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les deux suites (convergentes) $(\varphi(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc égales : leur limite aussi. D'où $\varphi(x) = \psi(x)$.$\square$

On déduit immédiatement du lemme 3.6 l'égalité de $f$ et de la fonction $\exp_{f(1)}$.$\square$

## 4. Equation fonctionnelle des fonctions puissances

On présente ici directement le problème analogue aux problèmes 2.5 pour l'équation fonctionnelle du logarithme et 3.3 pour l'équation fonctionnelle de l'exponentielle.

### 4.1. Pré requis, problème et résultat

#### 4.1.1. Notion requises (les prérequis des oraux du CAPES)

On suppose acquises les notions suivantes.

- Notions sur l'étude des fonctions : limite, continuité dérivablité.
- Intégrale des fonctions continues. Régularité de l'application intégrale $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Les fonctions puissances : définition et première propriétés.
- La fonction logarithme néperien et la fonction exponentielle de base e, réciproque l'une de l'autre.
- Propriété de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (pour la deuxième démonstration proposée).

#### 4.1.2. Le problème et le résultat

**Problème 4.1.** *Déterminer les fonctions numériques $f$ définies sur $\mathbb{R}_+$ et continues en au moins un point de $\mathbb{R}_+^*$ telles que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad f(xy) = f(x)f(y). \tag{4.1}$$

Le résultat est un exact analogue des théorèmes 2.6 et 3.4 :

**Théorème 4.2.** *Une fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue en au moins un point de $\mathbb{R}_+^*$ vérifie l'équation fonctionnelle (4.1) si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vraie :*
*1. $f$ est la fonction nulle ;*
*2. il existe $a$, constante réelle, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^a$.*

### 4.2. Les démonstrations

#### 4.2.1. Première démonstration (utilisant notamment les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue)

Cette démonstration est dans l'esprit des précédentes.

- On remarque d'abord que les fonctions puissances vérifient l'équation fonctionnelle (4.1).
- Il reste à voir que la condition est nécessaire.

Soit donc $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue en un point de $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant l'équation fonctionnelle (4.1).

***Si $f$ s'annule en un point alors $f$ est la fonction nulle.***
Supposons en effet qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$. Soit alors $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a, d'après l'équation fonctionnelle $f(x) = f(x_0 x/x_0) = f(x_0)f(x/x_0) = 0$.

*On se placera donc désormais dans le cas où $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.*

On remarque qu'alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) > 0$. Donc $f$ est **à valeurs strictement positives**. On a, en particulier, $f(1) = (f(1))^2$. Puisque $f$ ne s'annule pas, on en déduit $f(1) = 1$.

***La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.***
Soit $x_0$ un point de $\mathbb{R}_+^*$ où la fonction $f$ est continue. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque et $h$ un réel tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$f(x+h) = f(x(1+h/x)) = f\left((x/x_0)(1+h/x)x_0\right) = f(x/x_0)f((1+h/x)x_0).$$

La fonction $h \mapsto (1+h/x)x_0$, définie sur un voisinage de $x_0$, est continue en $h = 0$ et prend en ce point la valeur $x_0$. Comme la fonction $f$ est continue en $x_0$ on a par composition $\lim_{h\to 0} f((1+h/x)x_0) = f(x_0)$. D'où enfin, $\lim_{h\to 0}\ f(x+h) = f(x/x_0)f(x_0) = f(x)$.

***Lorsque $f$ ne s'annule pas, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$***
En intégrant l'équation fonctionnelle (4.1) par rapport à $y$, il vient

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \qquad \int_1^y f(xt)\mathrm{d}t = f(x)\int_1^y f(t)\mathrm{d}t.$$

D'où, en effectuant le changement de variables $u = xt$ dans la première intégrale

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \qquad (1/x)\int_x^{xy} f(u)\mathrm{d}u = f(x)\int_1^y f(t)\mathrm{d}t.$$

On fixe désormais $y$ différent de 1 et on pose $\alpha = \int_1^y f(t)\mathrm{d}t \neq 0$. On a donc l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,. \quad \alpha f(x) = (1/x)\int_x^{xy} f(u)\mathrm{d}u.$$

Les fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto \int_x^{xy} f(u)\mathrm{d}u$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, cette dernière comme ‹‹ fonction des bornes ››, puisque $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $f$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

***Lorsque $f$ ne s'annule pas, $f$ est une fonction puissance*** .
En dérivant l'équation fonctionnelle par rapport à $y$, il vient

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad xf'(xy) = f(x)f'(y).$$

En particulier pour $y = 1$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \;\; xf'(x) = f(x)f'(1)$.
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \;\; f'(x)/f(x) = f'(1)/x$.
Comme la fonction $f$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(f(x)/f(1)\right) = f'(1)\ln x.$$

Comme $f(1) = 1$, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \;\; f(x) = \exp(f'(1)\ln x) = x^{f'(1)}$.
On pose alors $a = f'(1)$.

**Remarque.-** Soit $f$ une fonction continue ne s'annulant pas et vérifiant l'équation fonctionnelle (4.1). Cette fonction $f$ est strictement positive, selon le raisonnement précédent. On définit alors $g$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \ln(f(x)).$$

La fonction $g$ vérifie clairement

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad g(xy) = g(x) + g(y).$$

Ainsi $g$ satisfait l'équation fonctionnelle du logarithme. Selon le théorème 2.6, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = k\ln x.$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \exp(k\ln x) = x^k.\square$$

Ainsi, on peut se ramener à l'équation fonctionnelle du logarithme. Cependant, mettre cette équation en prérequis d'une leçon conduit à trop l'alléger. On s'expose de plus à devoir démontrer le théorème 2.6 ou un analogue lors des questions.
Cette méthode suggère la démonstration qui suit, reprise en fait des idées de la deuxième démonstration effectuée pour l'équation fonctionnelle du logarithme.

### 4.2.2. Deuxième démonstration (utilisant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$)

Cette démonstration du théorème 4.2 commence comme celle développée ci dessus :

- on remarque d'abord que les fonctions puissances vérifient l'équation fonctionnelle (4.1),
- il reste à montrer que la condition est nécessaire.

Soit donc $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue en un point de $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant l'équation fonctionnelle (4.1).

***Si $f$ s'annule en un point alors $f$ est la fonction nulle.*** *Voir démonstration ci dessus*

***On se place donc désormais dans le cas où $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.***

**Lemme 4.3.** *Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$ continue en un point de $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant l'équation fonctionnelle (4.1). Alors la fonction $h := \ln \circ f \circ \exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ continue en un point de $\mathbb{R}$ et satisfait l'équation fonctionnelle*

$$h(x+y) = h(x) + h(y).$$

*Preuve du lemme 4.3.*
*i.* La fonction exp, définie sur $\mathbb{R}$, est à valeurs strictement positives ce qui assure la définition de la fonction $f \circ \exp$. Comme $f$ est à valeurs strictement positives, la fonction $h = \ln \circ f \circ \exp$ est définie. On a donc le schéma suivant.

$$h : \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}_*^+ \xrightarrow{f} \mathbb{R}_*^+ \xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$$

Supposons la fonction $f$ continue au point $x \in \mathbb{R}_*^+$. La fonction exp (*resp.* ln) étant continue sur $\mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{R}_*^+$) est continue au point $\ln x$ (*resp.* $x$). Ainsi, d'après le théorème de composition, $h$ est continue au point $\ln x$.
*ii.* Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}
h(x+y) &= \ln\left(f\left(\exp\left(x+y\right)\right)\right), \\
&= \ln\left(f\left(\exp\left(x\right)\exp\left(y\right)\right)\right) \quad \text{(Propriété fonctionelle de l'exponentielle)}, \\
&= \ln\left(f\left(\exp\left(x\right)\right) f\left(\exp\left(y\right)\right)\right) \quad \text{(Propriété fonctionelle de } f\text{)}, \\
&= \ln\left(f\left(\exp\left(x\right)\right)\right) + \ln\left(f\left(\exp\left(y\right)\right)\right) \quad \text{(Propriété fonctionelle du logarithme)}, \\
&= \ln \circ f \circ \exp\left(x\right) + \ln \circ f \circ \exp\left(y\right) = h(x) + h(y). \square
\end{aligned}$$

Pour achever la démonstration du théorème 4.2, on applique le lemme 2.8 à la fonction $h$. Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad kx = \ln \circ f \circ \exp(x).$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp\left(kx\right) = f \circ \exp(x).$$

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$f\left(x\right) = \exp(k \ln x) = x^k. \square$$

**Remarque.-** Cette méthode conduit pour l'équation fonctionnelle des fonctions puissances à un exposé cohérent, qui nécessite des pré-requis acceptables sur les fonctions ln et exp, à savoir, grosso modo leurs propriétés de base (ensemble de définition, continuité, ...) leurs propriétés fonctionnelles et le fait qu'elles sont réciproques l'une de l'autre.

## 5. En guise de conclusion

Pour résumer l'ensemble des cheminements de ce document, voici une brève synthèse :

- Les théorèmes 2.6, 3.4 et 4.2 correspondent au niveau attendu pour l'Oral du CAPES,
- les *premières démonstrations* de ces théorèmes reposent sur des arguments similaires, nécessitant de connaître quelques propriétés sur les primitives des fonctions continues.
- les *deuxièmes démonstrations* des mêmes théorèmes ramènent toute le problème à l'étude de l'équation fonctionnelle
$$\forall\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{5.1}$$
beaucoup plus simple dont l'étude est réalisée dans le lemme 2.8.
- l'équation fonctionnelle de l'exponentielle se prête à une *troisième démonstration* utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

On note que les deux démonstrations données du lemme 2.8 sont dans l'esprit des autres démonstrations (propriété des primitives des fonctions continues *versus* densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.) Enfin, il est normal que l'équation fonctionnelle 5.1 et celle de l'exponentielle se prêtent bien à un raisonnement par densité. En effet, en donnant une propriété de l'image de la somme de deux réels, elles permettent une expression facile de l'image d'un entier relatif, puis d'un rationnel.

**IUFM de GUADELOUPE -Morne Ferret - BP 517**
**97178 ABYMES CEDEX (Guadeloupe)**

PLC1-Mathématiques
Auteur : A. Delcroix

# INTEGRALES GENERALISEES

## 1. Généralités

### 1.1. Introduction

Dans la théorie de l'intégrale de Riemann, la notion d'intégrale généralisée arrive relativement naturellement.
Soit par exemple $f : ]\alpha, \beta[ \to \mathbb{C}$, avec $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$, $\alpha < \beta$, une application continue. On sait que $f$ est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[c, d] \subset ]\alpha, \beta[$. Pour $c$ fixé dans $]\alpha, \beta[$, ceci permet de définir une application primitive $F_c : ]\alpha, \beta[ \to \mathbb{C}$ de $f$ par : $\forall x \in ]\alpha, \beta[\,,\ F_c(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
La question du comportement asymptotique de $F_c$ aux bornes de l'intervalle $]\alpha, \beta[$, et en particulier de l'existence de limites, est alors une question naturelle d'analyse élémentaire.
C'est donc le problème de la convergence des quantités $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x$ tendant vers $\alpha$ (resp. $\beta$) qui est posé, c'est-à-dire le problème de l'existence des *intégrales généralisées* $\int_c^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^c f(t)\,\mathrm{d}t$. Certains auteurs préfèrent parler *d'intégrales impropres*.

En lisant ce document, le lecteur aura intérêt à penser aux analogies à établir avec l'étude des séries numériques (ou complexes).

### 1.2. Définitions et premières remarques

**Définition 1.** *Soit $I$ un intervalle réel d'intérieur non vide et $f : I \to \mathbb{C}$ une application. On dit que $f$ est* ***localement intégrable*** *sur l'intervalle $I$ si $f$ est intégrable au sens de Riemman sur tout intervalle compact $[c, d]$ inclus dans $I$.*

**Exemples 1.1.**
*(i) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. On sait que $f$ est aussi intégrable sur tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[a, b]$. Ainsi, $f$ est localement intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.*
*(ii) Soit $f : I \to \mathbb{C}$, $I$ un intervalle réel d'intérieur non vide, continue. L'application $f$ est continue, donc intégrable, sur tout intervalle compact $[c, d]$ inclus dans $I$ . Ainsi, $f$ est localement intégrable sur l'intervalle $I$.*

On considère dans les définitions 2 et 3 un intervalle $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a < b$ et une application $f : [a, b[ \to \mathbb{C}$. *On suppose $f$ localement intégrable sur $[a, b[$.*

**Définition 2.** *On dit que $f$ possède* ***une intégrale généralisée*** *ou* ***impropre*** *sur $[a, b[$ si l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (définie sur $[a, b[$) possède une limite pour $x$ tendant vers $b$, par valeurs inférieures.*
*On dit alors que l'intégrale généralisée ou impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$* ***converge*** *et on note*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b, x < b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Remarques**
$(i)$ On confond donc la *valeur de la limite* et l'objet $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. C'est un abus fréquent en mathématique.
$(ii)$ Par convention, une intégrale écrite $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, où $a > b$ et la fonction $f$ est non définie en $a$, est dite convergente si, et seulement si, l'intégrale $\int_b^a b(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. On pose alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$. Le lecteur est invité à constater la cohérence de cette convention avec celle analogue prise pour les intégrales ordinaires.

**Définition 3.** *Avec les notations de la définition 2, si l'application* $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *ne possède pas de limite en* $b$*, on dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***diverge****.*

Enonçons quelques propriétés des intégrales généralisées.

**Proposition 1.1.** *Avec les notations de la définition 2, l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si, et seulement si, il existe* $c \in [a, b[$ *tel que l'intégrale* $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge. On a alors de plus*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Preuve**.- Soit $c \in [a, b[$. La relation de Chasles donne

$$\forall x \in [a, b[\,, \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, le membre de gauche de l'égalité précédente à une limite en $b$ si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en possède une, le terme $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ étant une constante.□

L'ensemble de ce document (sauf exception mentionnée) est écrit dans le cadre des applications à valeurs complexes. Avec les notations de la définition 2, posons $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$. On sait que l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite si, et seulement si sa partie réelle (*id est* $\int_a^x \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t$) et sa partie imaginaire en possèdent une. On a donc :

**Proposition 1.2.** *Avec les notations de la définition 2,* $f$ *possède une intégrale généralisée si, et seulement si, les fonctions (à valeurs réelles)* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *en possèdent une. On a alors de plus*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Proposition 1.3.** *Soit* $[a, b[$ *un intervalle avec* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *et* $a < b$*. L'ensemble* $Ig([a, b[\,, \mathbb{C})$ *des applications* $f : [a, b[ \to \mathbb{C}$ *localement intégrables et possédant une intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel. De plus*

$$\forall (f, g) \in Ig([a, b[\,, \mathbb{C})^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \quad \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette proposition découle immédiatement des propriétés algébriques analogues portant sur l'ensemble des applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{C}$ possédant une limite en $b$.

On laisse au lecteur le soin d'introduire les notions **d'intégrale convergente**, **divergente** pour le cas d'un intervalle de type $]a, b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

**Proposition-Définition 4.** *Soit* $f : ]a, b[ \to \mathbb{C}$*,* $((a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$*,* $a < b$*) localement intégrable sur* $]a, b[$*.*
*(A) On dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente si l'une des deux assertions équivalentes suivantes est satisfaite :*
*(i) il existe* $c \in ]a, b[$ *tel que les intégrales* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent ;*
*(ii) pour tout* $d \in ]a, b[$*, les intégrales* $\int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent ;*
*De plus si i. ou ii. est satisfaite, la quantité* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est indépendante de* $c$ *et on pose*

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Définition}}{=} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

*On dit alors que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est* ***convergente****.*
*(B) S'il existe* $c \in ]a, b[$ *tel que l'une au moins des intégrales* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge, l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est dite* ***divergente****.*

**Preuve**.- On doit démontrer l'équivalence des assertions $i.$ et $ii.$, cette équivalence justifiant en particulier la formulation de $iii.$
$[i \Rightarrow ii]$ Soit $c \in ]a,b[$ rendant vraie $i.$ et $d \in ]a,b[$. D'après la proposition 1.1 (qui s'adapte au cas présent), l'intégrale $\int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, avec

$$\int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De même, l'intégrale $\int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, avec

$$\int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_d^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où

$$\int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t + \int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$[ii \Rightarrow i]$ Comme $]a,b[$ est non vide, il existe $c \in ]a,b[$ tel que, d'après $ii.$, les intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.□

**Remarque :** *cas ou l'intervalle* $]a,b[$ *est symétrique par rapport à* $0$ (par exemple $]a,b[\, = \,]-\infty,+\infty[$).
On pose $]a,b[\, = \,]-\omega,\omega[$, $\omega \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Si l'intégrale $\int_{-\omega}^{\omega} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il est clair que $\lim_{r\to\omega} \int_{-r}^{r} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe. En revanche $\lim_{r\to\omega} \int_{-r}^{r} f(t)dt$ *peut exister sans que l'intégrale* $\int_{-\omega}^{\omega} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*
*Exemple* **:** On prend $]a,b[\, = \,]-\infty,+\infty[$ et $f$ une application impaire. Alors

$$\forall r > 0, \quad \int_0^r f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-r}^0 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où $\int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et l'existence de $\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Cependant, le cas de $f : t \mapsto t^3$ montre que chacune des intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ peut diverger. En effet, dans ce cas

$$\forall r > 0, \quad \int_0^r t^3\,\mathrm{d}t = r^4/4 = -\int_{-r}^0 f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \lim_{r\to+\infty} \int_0^r f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

### 1.3. Quelques exemples et propriétés

#### 1.3.1. Les "fausses intégrales généralisées"

On considère ici une application $f : ]a,b] \to \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, continue sur $]a,b]$, donc localement intégrable sur $]a,b]$. *On suppose de plus* $f$ *prolongeable par continuité en* $a$. La question posée est celle de l'existence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de $f$, *id est* $\widetilde{f}(a) = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$, $\widetilde{f}_{|]a,b]} = f$. L'application $\widetilde{f}$ est continue sur $[a,b]$ donc intégrable et localement intégrable sur cet intervalle. On a

$$\forall x \in ]a,b]\,, \quad \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^b \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus $\lim_{x\to a, x>a} \int_x^b \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$. (En effet, $\left|\int_x^b \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq (x-a)\,M$, ou $M = \sup_{t\in[a,b]} \left|\widetilde{f}(t)\right| < +\infty$, puisque $\widetilde{f}$ est continue sur $[a,b]$.)
C'est donc que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\int_a^b \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exemple 1.2.** *On considère* $f : ]0,\pi] \to \mathbb{R}$, *définie par :* $\forall t \in ]0,\pi] \quad f(t) = \frac{\sin t}{t}$. *On a* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. *L'application* $f$ *se prolonge ainsi par continuité en* $0$ *et l'intégrale* $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *converge.*

### 1.3.2. Le critère de Cauchy de convergence d'intégrales généralisées

Rappelons deux formes du critère de Cauchy d'existence de limite.

**Lemme 1.4.**
*(i) Soit* $h : ]a,b] \to \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. *L'application* $h$ *possède une limite en* $a$, *si et seulement si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ \left(\forall\,(x,y) \in ]a,b]^2\right)\ \ (|x-a| < \eta \text{ et } |y-a| < \eta) \Longrightarrow |h(x) - h(y)| < \varepsilon.$$

*(ii) Soit* $h : [a,+\infty[ \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$. *L'application* $h$ *possède une limite en* $+\infty$, *si et seulement si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ \forall\left((x,y) \in [a,+\infty[^2\right)\ \ (x > B \text{ et } y > B) \Longrightarrow |h(x) - h(y)| < \varepsilon.$$

Considérons par exemple une application $f : ]a,b] \to \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, localement intégrable sur $]a,b]$. En appliquant le $i$. du lemme 1.4 à l'application $h : ]a,b] \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall x \in ]a,b]\ \ h(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient le $i$. du critère ci-dessous. On laisse au lecteur la preuve du $ii$.

**Lemme 1.5.** Critère de Cauchy pour l'existence d'intégrales généralisées.
*(i) Soit* $f : ]a,b] \to \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *localement intégrable. L'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente si, et seulement si,*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ \left(\forall\,(x,y) \in ]a,b]^2\right)\ \ (|x-a| < \eta \text{ et } |y-a| < \eta) \Longrightarrow \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

*(ii) Soit* $f : [a,+\infty[ \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, *localement intégrable. L'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente si, et seulement si,*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ \left(\forall\,(x,y) \in [a,+\infty[^2\right)\ \ (x > B \text{ et } y > B) \Longrightarrow \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Ce lemme est utilisé dans la suite pour obtenir des théorèmes de convergence d'intégrales généralisées. Comme tout critère de Cauchy, il a peu d'utilité pratique pour déterminer des valeurs d'intégrales généralisées.

### 1.3.3. Première application : le cas d'une application bornée, définie sur un intervalle borné non fermé

On considère par exemple une application $f : ]a,b] \to \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, localement intégrable sur $]a,b]$ et *bornée* sur $]a,b]$. La question posée est de nouveau celle de l'existence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
On applique le lemme 1.5. Posons $M = \sup_{t\in]a,b]} f(t)$, que l'on suppose strictement positif (sinon $f$ est nulle et il n'y a rien à démontrer). On a[1]

$$\forall\,(x,y) \in ]a,b]^2, \quad |h(x) - h(y)| = \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_y^x |f(t)|\right|\,\mathrm{d}t$$
$$\le M\,|x-y| \le M\,(|x-a| + |y-a|)\,.$$

Pour $\varepsilon > 0$, le choix de $\eta = \varepsilon/(2M)$ rend vraie la propriété (1.1).
On en déduit donc la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exemple 1.3.** *On considère* $f : ]0,\pi] \to \mathbb{R}$, *définie par :* $\forall t \in ]0,\pi]\quad f(t) = \sin(1/t)$. *L'application* $f$ *est continue sur* $]0,\pi]$ *et bornée sur* $]0,\pi]$. *Ainsi l'intégrale* $\int_0^\pi \sin(1/t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

*Remarque.*- Le cas des applications prolongeables par continuité en une borne de l'intervalle, étudié ci-dessus, constitue un cas particulier de l'étude faite ici.

[1] On rappelle que pour $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha < \beta$, on a

$$\left|\int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_\alpha^\beta |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Si l'on ne précise pas $\alpha < \beta$, on a

$$\left|\int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_\alpha^\beta |g(t)|\,\mathrm{d}t\right|.$$

## 2. Le cas des fonctions à valeurs positives

### 2.1. Théorème général de comparaison

**Proposition 2.1.** ***(critère de comparaison)***.- *Soit* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ *deux applications localement intégrables* à valeurs positives.
$(i)$ *Si pour tout* $t \in [a, b[$, *on a* $f(t) \leq g(t)$ *alors :*
• *si l'intégrale* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge,*
• *si l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge, l'intégrale* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*
$(ii)$ *Si* $f(t) \sim g(t)$ *pour* $t \rightarrow b^-$, *alors les intégrales* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature (i.e. soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes).*

**Preuve**
$(i)$ On applique les théorèmes usuels de comparaison sur les limites.
$(ii)$ Sous l'hypothèse $f(t) \sim g(t)$ pour $t \rightarrow b^-$, il existe deux nombres réels $k_1$ et $k_2$ avec $0 < k_1 \leq 1 \leq k_2$ et un réel $a' \geq a$ tels que

$$\forall t \in [a', b[, \quad k_1 f(t) \leq g(t) \leq k_2 f(t).$$

On applique alors le $i$.□

**Corollaire 2.2.** *Avec les notations du théorème 2.1, supposons que* $f(t) = \mathrm{O}(g(t))$ *(resp.* $f(t) = \mathrm{o}(g(t))$*) pour* $t \rightarrow b^-$. *Alors :*
$(i)$ *si l'intégrale* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge,*
$(ii)$ *si l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge, l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

**Preuve**.- D'une part on a : $(t) = \mathrm{o}(g(t))) \Longrightarrow f(t) = \mathrm{O}(g(t))$.
D'autre part si $f(t) = \mathrm{O}(g(t))$ pour $t \rightarrow b^-$, il existe un nombre réel $k > 0$ et un réel $a' \geq a$ tels que

$$\forall t \in [a', b[, \qquad f(t) \leq kg(t).$$

On applique alors le $(i)$ du théorème 2.1.□

### 2.2. Exemples fondamentaux et critère de comparaison

**Théorème 2.3.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.
$(i)$ *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ *converge si, et seulement si* $\alpha > 1$,
$(ii)$ *l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ *converge si, et seulement si* $\alpha < 1$.

**Preuve**.- On effectue directement le calcul de l'intégrale $\int_1^b (1/t^\alpha)\,\mathrm{d}t$, pour $b \in \mathbb{R}_+^*$ et on étudie la convergence de l'expression obtenue pour $b \rightarrow +\infty$ (*resp.* $b \rightarrow 0$).□

En combinant cet exemple fondamental et le théorème 2.1, on obtient les théorèmes classiques suivants.

**Théorème 2.4.** *Critère de comparaison en* $+\infty$.- *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ *une application localement intégrable* à valeurs positives. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $l \in \mathbb{R}$ non nul.
*On dispose des résultats énoncés dans la troisième colonne du tableau ci-dessous, en application des hypothèses formulées dans les deux premières colonnes.*

| Comportement en $+\infty$ de l'application $t \mapsto t^\alpha f(t)$ | Valeur de $\alpha$ | Comportement de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ |
|---|---|---|
| $t^\alpha f(t) \longrightarrow l \neq 0$ | $\alpha > 1$ | $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge |
| | $\alpha \leq 1$ | $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge |
| $t^\alpha f(t) \longrightarrow 0$ | $\alpha > 1$ | $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge |
| | $\alpha \leq 1$ | *Pas de conclusion* |
| $t^\alpha f(t) \longrightarrow +\infty$ | $\alpha > 1$ | *Pas de conclusion* |
| | $\alpha \leq 1$ | $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge |

**Théorème 2.5.** *Critère de comparaison en* 0.- *Soit* $b \in \mathbb{R}$ *et* $f : ]0, b] \to \mathbb{R}$ *une application localement intégrable* à valeurs positives. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $l \in \mathbb{R}$ non nul.
*On dispose des résultats énoncés dans la troisième colonne du tableau ci-dessous, en application des hypothèses formulées dans les deux premières colonnes.*

| Comportement en $0^+$ de l'application $t \mapsto t^\alpha f(t)$ | Valeur de $\alpha$ | Comportement de l'intégrale $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ |
|---|---|---|
| $t^\alpha f(t) \longrightarrow l \neq 0$ | $\alpha < 1$ | $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge |
| | $\alpha \geq 1$ | $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge |
| $t^\alpha f(t) \longrightarrow 0$ | $\alpha < 1$ | $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge |
| | $\alpha \geq 1$ | *Pas de conclusion* |
| $t^\alpha f(t) \longrightarrow +\infty$ | $\alpha < 1$ | *Pas de conclusion* |
| | $\alpha \geq 1$ | $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge |

**Remarque**.- Il est important de remarquer que dans l'ensemble de ces résultats de comparaison pour des fonctions à valeurs positives, la *comparaison porte sur les fonctions elles-mêmes.*

### 2.3. Un autre exemple : les intégrales de Bertrand

*Il n'est pas obligatoire de connaître par coeur les résultats de ce paragraphe. Cependant, il est impératif de savoir les retrouver rapidement.*

Il s'agit des intégrales du type

$$\int_a^{+\infty} 1/(t^\alpha \ln^\beta t)\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_0^b 1/(t^\alpha\,|\ln t|^\beta)\,\mathrm{d}t$$

où $a$ (*resp.* $b$) est un réel strictement supérieur à 1 (*resp.* à 0) et $(\alpha, \beta)$ un couple de réels quelconques.

On a le résultat suivant.

**Théorème 2.6.** *Avec les notations ci-dessus :*
$(i)$ *l'intégrale* $\int_a^{+\infty} 1/(t^\alpha \ln^\beta t)\,\mathrm{d}t$ *converge si, et seulement si, l'une des 2 conditions suivantes est réalisée*

$$i.1.\;\; \alpha > 1 \;\; ; \;\; i.2. \quad \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\,;$$

$(ii)$ *L'intégrale* $\int_0^a 1/(t^\alpha\,|\ln t|^\beta)\,\mathrm{d}t$ *converge si, et seulement si, l'une des 2 conditions suivantes est réalisée*

$$ii.1.\;\; \alpha < 1 \;\; ; \;\; ii.2. \quad \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1.$$

**Preuve**.- Il suffit d'étudier la convergence des deux intégrales suivantes

$$(1) \;\; \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} 1/(t^\alpha \ln^\beta t)\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; (2) \;\; \int_0^{1/\mathrm{e}} 1/(t^\alpha\,|\ln t|^\beta)\,\mathrm{d}t$$

$(A)$ Pour étudier l'intégrale (1), on pose $f(t) = t^{-\alpha} \ln^{-\beta} t$. La application $f$ est définie, continue, positive sur l'intervalle $[e, +\infty[$. On pose encore $\varphi(t) = t^{(1+\alpha)/2} f(t)$.

- Si $\alpha > 1$, on a $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$ ; alors $f(t) = \circ(t^{-(1+\alpha)/2})$ en $+\infty$. Comme $(1+\alpha)/2 > 1$, l'intégrale (1) converge, d'après le théorème 2.4.
- Si $\alpha < 1$, on a $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$; alors $t^{-(1+\alpha)/2} = \circ(f(t))$ en $+\infty$. Comme $(1+\alpha)/2 < 1$, l'intégrale (1) diverge, d'après le théorème 2.4.
- Si $\alpha = 1$, on pose directement $F(x) = \int_{\mathrm{e}}^x 1/(t \ln^\beta t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > e$. On a $F(x) = \int_{\mathrm{e}}^{\ln x} 1/u^\beta\,\mathrm{d}u$.
  - Si $\beta \neq 1$, il vient $F(x) = 1/(1-\beta)\left((\ln x)^{1-\beta} - 1\right)$ ; on en déduit la convergence pour $\beta > 1$ et la divergence pour $\beta < 1$.
  - Si $\beta = 1$, il vient $F(x) = \ln(\ln x)$, qui tend vers $+\infty$, pour $x$ tendant vers $+\infty$.

$(B)$ Pour étudier l'intégrale (2), on effectue le même type de raisonnement, en utilisant le théorème 2.5. Une autre preuve sera vue au paragraphe 4.3.□

## 3. Retour aux fonctions à valeurs complexes

Un des moyens d'étude est de chercher à se ramener au cas d'une application à valeurs positives. Ceci justifie l'introduction de la notion d'absolue convergence. Une intégrale absolument convergente est en particulier convergente.
Cependant, lorsqu'une intégrale est convergente sans être absolument convergente (on dit semi convergente) on dispose de quelques outils d'étude comme la règle d'Abel et ceux développés dans la suite.

### 3.1. Absolue et semi convergence

On considère dans ce paragraphe $f : [a,b[ \to \mathbb{C}$, $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2$, $a < b$, *localement intégrable* sur $[a,b[$. Le lecteur vérifiera que l'application $|f|$ est aussi localement intégrable sur $[a,b[$.

**Définitions 5.**
(*i*) *On dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est* **absolument convergente** *si l'intégrale* $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *converge ;*
(*ii*) *On dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est* **semi convergente** *si l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et si l'intégrale* $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

**Proposition 3.1.** *Si l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est absolument convergente alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge. On a alors de plus*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Preuve.**- On effectue la démonstration dans le cas ou $b = +\infty$ et on laisse le soin au lecteur de traiter le cas $b \in \mathbb{R}$ à l'aide d'une variante du lemme 1.5 : l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ \left(\forall (x,y) \in [a,+\infty[^2\right)\ \ (x > B \text{ et } y > B) \Longrightarrow \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Comme l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, la propriété 3.1 s'applique avec $|f|$ : il existe $B > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [a,+\infty[^2,\ \ (x > B \text{ et } y > B) \Longrightarrow \left|\int_y^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Or $\left|\int_y^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \geq \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|$. On en déduit

$$\forall (x,y) \in [a,+\infty[^2,\ \ (x > B \text{ et } y > B) \Longrightarrow \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. De plus on a

$$\forall x \in [a,+\infty[,\ \ \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{3.2}$$

cette dernière inégalité étant vraie car la fonction $x \mapsto \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est croissante (on intègre une fonction positive) et donc majorée par sa limite en $+\infty$.
Comme $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, un prolongement d'inégalité dans la relation 3.2 donne $\left|\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.□

**Exemple 3.1.** *L'intégrale* $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\exp(it)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *est absolument convergente.*

En effet, pour tout $t \in [\pi,+\infty[$, on a $\left|(\exp(it))/t^2\right| \leq 1/t^2$. Or, d'après le théorème 2.4, l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \left(1/t^2\right)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Donc l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} (\sin t)/t^2\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

**Exemple 3.2.** *L'intégrale* $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\exp(it)}{t}\,\mathrm{d}t$ *n'est pas absolument convergente.*

En effet, pour tout $t \in [\pi, +\infty[$, on a $|\exp(it)| = 1$. D'après le théorème 2.4, l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} 1/t\,\mathrm{d}t$ est divergente. Donc l'intégrale étudiée n'est pas absolument convergente.
On montrera dans les paragraphes suivants qu'elle est semi convergente. Nontons que dans ces exemples, on a pu se ramener à un théorème de comparaison entre fonctions à valeurs positives.

On laisse au lecteur le soin d'adapter les définitions de ce paragraphe et les résultats du suivant aux cas d'applications définies sur des intervalles du type $]a, b]$.

### 3.2. La règle d'Abel

**Théorème 3.2.** *Soit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$, $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b[ \to \mathbb{C}$ deux applications localement intégrables. On suppose de plus :*
*$(i)$ l'application $f$ est décroissante et admet $0$ pour limite en $b$ ;*
*$(ii)$ il existe $M$, un réel positif, tel que*

$$\forall\, (u, v) \in [a, b[^2\,, \quad \left|\int_u^v g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M. \tag{3.3}$$

*Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.*

**Remarques**
$(i)$ L'application $f$ est donc supposée à *valeurs réelles positives*.
$(ii)$ La condition (3.3) peut être remplacée par

$$\forall x \in [a, b[\,, \quad \left|\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M. \tag{3.4}$$

Le lecteur vérifiera sans peine l'équivalence des formulations (3.3) et (3.4) à l'aide de la relation de Chasles.

**Preuve**.
$(A)$ On effectue d'abord la preuve pour le cas d'une application $g$ à valeurs réelles.- On utilise le critère de Cauchy de convergence et la *deuxième formule de la moyenne* dont on rappelle un énoncé ci-dessous :

**Lemme 3.3.** *Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $u < v$ et $f, g : [u, v] \to \mathbb{R}$ deux applications localement intégrables. On suppose de plus que l'application $f$ est à valeurs positives et décroissante. Il existe $\xi_{u,v} \in ]u, v[$ tel que*

$$\int_u^v f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(u) \int_u^{\xi_{u,v}} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $(x, y) \in [a, b[^2$ avec $x < y$. D'après le lemme (3.3), il existe $\xi_{x,y}$ compris entre $x$ et $y$ tel que

$$\left|\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| = f(x) \left|\int_x^{\xi_{x,y}} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq f(x)M,$$

d'après l'hypothèse $ii$. (inégalité (3.3)).
Comme par hypothèse $\lim_{u \to b} f(u) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [b - \eta, b[\,, \quad f(x)M < \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $(x, y) \in [b - \eta, b[^2\,,\ \ \left|\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$.
Ainsi, l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
$(B)$ Revenons au cas général d'une application $g$ à valeurs complexes. Posons $g = \mathrm{Re}\,(g) + i\,\mathrm{Im}(g)$. On a alors, d'après (3.3),

$$\forall\, (u, v) \in [a, b[^2\,, \quad \left|\int_u^v \mathrm{Re}(g(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq M\ , \quad \left|\int_u^v \mathrm{Im}(g(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq M.$$

On applique alors le $(A)$ aux deux couples d'applications $(f, \mathrm{Re}(g))$ et $(f, \mathrm{Im}(g))$. Ainsi, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{Re}(g(t))\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{Im}(g(t))\,\mathrm{d}t$ convergent. D'après la proposition 1.2 l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.□

**Exemple 3.3.** *L'intégrale* $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\exp(it)}{t}\,\mathrm{d}t$ *est semi convergente.*

En effet, définissons $f : [\pi,+\infty[ \to \mathbb{R}$ par $f(t) = 1/t$ et $g : [\pi,+\infty[ \to \mathbb{C}$ par $g(t) = \exp(it)$. Les applications $f$ et $g$ sont continues sur $[\pi,+\infty[$ donc localement intégrables sur cet intervalle. De plus :
*i*. L'application $f$ est décroissante sur $[\pi,+\infty[$, de limite nulle en $+\infty$,
*ii*. Pour tout $(u,v) \in [\pi,+\infty[^2$, $\int_u^v \exp(it)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i}\left[\exp(it)\right]_u^v = \frac{1}{i}\left(\exp(iv) - \exp(iu)\right)$. D'où $\left|\int_u^v \exp(it)\,\mathrm{d}t\right| \leq 2$.
Ainsi, les hypothèses du théorème 3.2 sont satisfaites. L'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\exp(it)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.□

L'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente comme partie imaginaire de celle étudiée dans l'exemple 3.3.
Compte tenu de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (exemple 1.2) on a :

**Exemple 3.4.** Intégrale de Dirichlet.- *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

**Remarque**.- Cette règle d'Abel est analogue de la règle d'Abel pour les séries. *On insistera jamais assez pour l'une comme pour l'autre sur la vérification scrupuleuse des hypothèses.*
En particulier, on insistera sur le point suivant : *l'hypothèse ii. porte sur une majoration d'intégrales et non sur une majoration de l'application g elle même.*

## 4. Autres outils d'étude des intégrales généralisées

### 4.1. Intégration par parties

Rappelons que :

**Théorème 4.1.** *Soit* $f, g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha < \beta$, *deux applications de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur* $[\alpha,\beta]$. *On a*

$$\int_\alpha^\beta f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)g(t)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère $f, g : [a,b[ \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $a < b$ deux applications de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[a,b[$. On a, pour tout $x \in [a,b[$,

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)g(t)\right]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans l'égalité ci-dessus, si deux des trois termes possèdent une limite en $b$, il en est de même du troisième. Ainsi, par exemple, pour établir la convergence de l'intégrale $\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, on démontre l'existence de $\lim_{x\to b, x<b}\left[f(t)g(t)\right]_a^x$ et la convergence de l'intégrale $\int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exemple 4.1.** *Deuxième démonstration de la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\exp(it)}{t}\,\mathrm{d}t$.

On considère l'application $t \mapsto \exp(it)$ comme la dérivée de $t \mapsto (1/i)\exp(it)$ pour écrire :

$$\begin{aligned}\int_\pi^x \frac{\exp(it)}{t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{i}\left[\frac{\exp(it)}{t}\right]_\pi^x + \frac{1}{i}\int_\pi^x \frac{\exp(it)}{t^2}\,\mathrm{d}t,\\ &= \frac{1}{i}\left(\frac{\exp(ix)}{x} + \frac{1}{\pi}\right) + \frac{1}{i}\int_\pi^x \frac{\exp(it)}{t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a $\lim_{x\to+\infty}\left(\exp(ix)\right)/x = 0$. Par ailleurs l'intégrale $\int_\pi^x \left(\exp(it)\right)/t^2\,\mathrm{d}t$ est convergente (*cf.* ci-dessus). Ainsi l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} (\exp(it)/t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, avec

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\exp(it)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i\pi} + \frac{1}{i}\int_\pi^{+\infty} \frac{\exp(it)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

### 4.2. Comparaison avec les séries

Dans ce paragraphe, on explicite quelques propositions reliant la convergence d'une série et celle d'une intégrale généralisée.

#### 4.2.1. Avec des fonctions à valeurs réelles ou complexes

**Proposition 4.2.** *Soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, localement intégrable. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[a, +\infty[$, croissante et tendant vers $+\infty$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, avec*

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n} u_k = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Preuve**.- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_{x_0}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction $\varphi : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$ égale à $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, la suite composée $\varphi \circ S : n \mapsto \int_{x_0}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$, égale à $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.□

**Remarque**.- La proposition 4.2 n'énonce pas une condition nécessaire et suffisante de convergence.

**Exemple 4.2.** *On considère la fonction $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{C}$, définie par $f(t) = \exp(it)$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente. En effet*

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \exp(it)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i}\left(\exp(ix) - 1\right).$$

*La fonction $x \mapsto \exp(ix)$ n'a pas de limite en $+\infty$.*
*Cependant, pour le choix de $x_n = 2n\pi$, on a*

$$u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \exp(it)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i}\left(\exp\left(2\left(n+1\right)\pi\right) - \exp\left(2n\pi\right)\right) = 0.$$

*Ainsi, la série $\sum u_n$ est la série nulle, donc convergente, alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.*

**Remarque**.- On utilise souvent la contraposée de la proposition 4.2 : s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[a, +\infty[$, croissante et tendant vers $+\infty$ telle que la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

**Exemple 4.3.** *Divergence de l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} |\sin t|\,/t\,\mathrm{d}t$.*

On considère ici $x_n = n\pi$, pour $n \geq 1$. On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (|\sin(t)|\,/t)\ \mathrm{d}t$. On a

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\frac{|\sin t|}{t}\right)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(n+1)\,\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\ \mathrm{d}t.$$

Or $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\ \mathrm{d}t = \int_0^\pi |\sin t|\ \mathrm{d}t$ par $\pi$-périodicité de la fonction $t \mapsto |\sin t|$. Comme $\int_0^\pi |\sin t|\ \mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = 2$, on a finalement

$$u_n \geq \frac{2}{(n+1)\,\pi}.$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ diverge. Il en est donc de même de l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} |\sin t|\,/t\,\mathrm{d}t$.

#### 4.2.2. Avec des fonctions à valeurs réelles positives.

**Proposition 4.3.** *Soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, localement intégrable* à valeurs positives. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[a, +\infty[$, croissante et tendant vers $+\infty$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. On a alors*

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n} u_k = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Preuve.-** En utilisant la proposition 4.2, il ne reste qu'à montrer que la convergence de la série $\sum u_k$ entraine celle de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$. Supposons $\sum u_k$ convergente. Notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, il existe $x_n \geq x$. La fonction $f$ étant positive, on a

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t = S_n \leq S,$$

puisque, la série $\sum u_k$ étant à termes positifs, sa somme $S$ majore toute somme partielle. Ainsi la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante majorée, donc admet une limite en $+\infty$. On a de plus

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq S.$$

Ainsi l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ainsi que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$). En appliquant le ‹‹ sens direct ›› de la proposition 4.2, il vient l'égalité $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = S$. (On peut aussi remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{x_0}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui entraine l'inégalité $S \leq \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.).$\square$

**Proposition 4.4.** *Soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, localement intégrable* décroissante *et* à valeurs positives. *Sont équivalentes :*
*(i) l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,*
*(ii) la série $\sum_{n\geq a} f(n)$ converge.*

**Preuve.-** Comme $f$ est supposée décroissante, on a, pour tout $n \geq a$, la double inégalité

$$\forall t \in [n, n+1]\,, \quad f(n+1) \leq f(t) \leq f(n).$$

En intégrant membre à membre l'inégalité précédente, il vient

$$\forall n \geq a, \quad f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n).$$

Ainsi, la série $\sum f(n)$ converge si, et seulement si la série $\sum \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Comme, d'après la proposition 4.3, la convergence de cette série équivaut à celle de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, la proposition 4.4 est démontrée.$\square$

### 4.2.3. Exemples

**Les séries de Bertrand** On peut utiliser la proposition 4.4 pour étudier les *séries de Bertrand*. On rappelle le résultat.

**Lemme 4.5.** *La série de Bertrand de terme général $1/(n^\alpha \ln^\beta n)$ converge si, et seulement si, l'une des 2 conditions suivantes est réalisée*

$$i.\ \alpha > 1 \ ; \quad ii.\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1.$$

**Preuve.-** On pose $\gamma = (1+\alpha)/2$ et $a_n = 1/(n^\alpha \ln^\beta n)$.

- Si $\alpha > 1$, alors $\gamma > 1$ et $\lim_{t\to+\infty} n^\gamma a_n = 0$ : la série $\sum_{n\geq 2} a_n$ converge.
- Si $\alpha < 1$, alors $\gamma < 1$ et $\lim_{t\to+\infty} n^\gamma a_n = +\infty$ : la série $\sum_{n\geq 2} a_n$ diverge.
- Si $\alpha = 1$, on a $a_n = 1/(n \ln^\beta n)$. Deux cas se présentent :
  - Si $\beta \leq 0$, on a $a_n \geq 1/n$ (dès que $n \geq 3$). La série $\sum_{n\geq 2} a_n$ diverge ;
  - Si $\beta > 0$. Dans ce cas la fonction $f : t \mapsto t^{-1} \ln^{-\beta} t$ est positive, décroissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$. Ainsi,d'après la proposition 4.4, la série $\sum_{n\geq 2} a_n$ est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ :
    - ∗ Si $\beta > 1$, la série $\sum_{n\geq 2} a_n$ converge ;
    - ∗ Si $\beta \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 2} a_n$ diverge.$\square$

**Nouvelle démonstration de la convergence de l'intégrale** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ Cette démonstration est basée sur une comparaison avec une série.
Notons que, pour tout $x \in ]\pi, +\infty[$, on a

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi n(x)} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t + \int_{\pi n(x)}^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \tag{4.1}$$

où $n(x)$ est le plus grand entier tel que $n(x)\pi \leq x$, i.e. $n = \mathrm{E}(x/\pi)$.
Or

$$\left| \int_{\pi n(x)}^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_{\pi n(x)}^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| \mathrm{d}t \leq \int_{\pi n(x)}^x \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \int_{x-\pi}^x \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{x-\pi}.$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi n(x)}^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = 0$.

Par ailleurs, pour tout $n \geq 0$, la quantité $\int_0^{\pi n} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est une somme partielle de la série de terme général $v_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$, $k \geq 0$. On a de plus

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+k\pi}\, \mathrm{d}t = (-1)^k w_k.$$

L'intégrale $w_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+k\pi}\, dt$ est positive et la suite $(w_k)_{k\geq 1}$ est clairement décroissante, de limite nulle. La série $\sum v_k$ est donc convergente d'après le critère d'Abel pour les séries alternées. En revenant à l'identité (4.1), on voit que la fonction $x \mapsto \int_0^{\pi n(x)} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge vers la somme de la série $\sum v_k$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge puisque les deux termes du membre de droite de l'identité (4.1) ont une limite.

## 4.3. Changement de variable

### 4.3.1. Le théorème de changement de variable dans les intégrales généralisées

Rappelons un résultat classique.

**Théorème 4.6.** *Soit $I, J$ deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to J$ une application de classe $C^1$ et $f : J \to \mathbb{C}$ une application continue. Pour tout couple $(\eta, \xi) \in I^2$, $\eta < \xi$, on a*

$$\int_\eta^\xi (f \circ \varphi)(\tau)\varphi'(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{\varphi(\eta)}^{\varphi(\xi)} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

**Preuve**.- Sous les hypothèses prises, la preuve est immédiate : la fonction $t \to f(\varphi(t))\varphi'(t)$ possède comme primitive $F \circ \varphi$, où $F$ est une primitive de $f$. On a donc

$$\int_\eta^\xi f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\, \mathrm{d}\tau = F \circ \varphi(\xi) - F \circ \varphi(\eta) = \int_{\varphi(\eta)}^{\varphi(\xi)} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Le théorème 4.6 sert de base au théorème suivant, concernant les intégrales généralisées.

**Théorème 4.7.** *Soit $\alpha$, $\beta$, $a$, $b$ quatre éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\alpha < \beta$, $a < b$ et $\varphi : ]\alpha, \beta[ \to ]a, b[$ un $C^1$-difféomorphisme croissant. Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{C}$ une application continue.*
*Sous ces hypothèses, l'intégrale $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(\tau)\varphi'(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ converge.*
*On a alors de plus*

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(\tau)\varphi'(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

**Preuve.**- Pour tout couple $(\eta, \xi) \in ]\alpha, \beta[$, $\eta < \xi$, on a

$$\int_\eta^\xi f \circ \varphi(\tau)\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\varphi(\eta)}^{\varphi(\xi)} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.2}$$

De même, pour tout couple $(u, v) \in ]a, b[$, $u < v$ on a

$$\int_{\varphi^{-1}(u)}^{\varphi^{-1}(v)} f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

$(i)$ Supposons la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $\lim_{\tau\to\alpha,\tau>\alpha} \varphi(\tau) = a$ et $\lim_{\tau\to\beta,\tau<\beta} \varphi(\tau) = b$, l'égalité 4.2 entraîne alors la convergence de l'intégrale $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

$(ii)$ Supposons la convergence de l'intégrale $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. En utilisant cette fois les limites de $\varphi^{-1}$, l'égalité 4.3 entraîne alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.□

On laisse au lecteur le soin d'adapter ce résultat au cas d'un $\mathrm{C}^1$-difféomorphisme décroissant et au cas d'intervalles semi fermés.

### 4.3.2. Exemples

**Exemple 4.4.** Intégrales de Bertrand.- *L'intégrale* $\int_0^{1/\mathrm{e}} 1/(t^\alpha\,|\ln t|^\beta)\,\mathrm{d}t$ *converge si, et seulement si, l'une des 2 conditions suivantes est réalisée*

$$1.\ \alpha < 1 \quad ; \quad 2. \quad \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1.$$

La démonstration de ces assertions peut se faire par un changement de variable approprié qui permet de se ramener à l'intégrale $\int_\mathrm{e}^{+\infty} 1/(t^\alpha \ln^\beta t)\,\mathrm{d}t$. Cette dernière (*cf.* ci-dessus) converge si, et seulement si, l'une des 2 conditions suivantes est réalisée

$$i.\ \alpha > 1 \quad ; \quad ii. \quad \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\ ;$$

Posons $f(t) = 1/(t^\alpha\,|\ln t|^\beta)$ pour $t \in ]0, 1/\mathrm{e}[$ et soit $\varphi : ]\mathrm{e}, +\infty[ \to ]0, 1/\mathrm{e}[$ l'application définie par $\varphi(\tau) = 1/\tau$. L'application $\varphi$ est un $\mathrm{C}^1$-difféomorphisme décroissant. L'intégrale $\int_0^{1/\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc si, et seulement si l'intégrale

$$\int_{+\infty}^{\mathrm{e}} f(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\int_\mathrm{e}^{+\infty} f(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

converge.
Or $\varphi'(\tau) = -1/\tau^2$ D'où

$$f(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau) = \frac{1}{\tau^{2-\alpha}\,|\ln \tau|^\beta}.$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{t^\alpha\,|\ln t|^\beta}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_\mathrm{e}^{+\infty} \frac{1}{\tau^{2-\alpha}\,|\ln \tau|^\beta}\,\mathrm{d}\tau$. Elle converge donc si, et seulement si :
$i.$ soit $2 - \alpha > 1$ *id est* $\alpha < 1$,
$ii.$ soit $2 - \alpha = 1$ et $\beta > 1$ *id est* $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.□

**Exemples 4.5.** Intégrales de Fresnel.- *Les deux intégrales suivantes sont convergentes :*

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t\ , \qquad \int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $a > 0$ fixé (par exemple $a = 1$). L'application $u \mapsto \sqrt{u}$ est un $\mathrm{C}^1$-difféomorphisme de $\left]a^2, +\infty\right[$ dans $]a, +\infty[$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t$ (resp. $\displaystyle\int_a^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t$) est de même nature que l'intégrale

$$\int_{a^2}^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \quad (\textit{resp.} \int_{a^2}^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u).$$

Ces dernières intégrales sont convergentes. On laisse au lecteur le soin d'en rédiger une preuve, en s'inspirant notamment des exemples 3.3, 3.4 et 4.1.

Notons que dans la pratique on dira qu'on effectue le changement de variable $t^2 = u$ en précisant qu'il s'agit d'un $\mathrm{C}^1$-difféomorphisme.

**Remarque.-** L'application $u \mapsto \sqrt{u}$ est un $\mathrm{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. Elle transforme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\, \mathrm{d}t$ (resp. $\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\, \mathrm{d}t$) en l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u \quad (\textit{resp.} \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u).$$

En procédant ainsi, on introduit une problème de convergence en 0 dans les intégrales : ceci vient du fait que l'application $u \mapsto \sqrt{u}$ ne se prolonge pas en une application de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. On laisse en exercice l'étude de ce problème à l'aide des outils donnés dans ce document. Il s'inspirera de l'exemple 1.2 et des théorèmes de comparaison. Cette difficulté explique le recours au réel $a > 0$ dans le raisonnement qui précédait et illustre les précautions à prendre dans les changements de variables dans les intégrales généralisées.

L'exemple 4.5 permet d'illustrer la remarque importante suivante.

**Remarque.-** Pour une fonction $f$ localement intégrable sur l'intervalle $[a, +\infty[$ ($a$ nombre réel), la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ ne préjuge pas du comportement asymptotique de $f$ au voisinage de $+\infty$. La fonction $f$ peut ne pas posséder de limite, comme dans les intégrales de Fresnel ou même ne pas être bornée au voisinage de $+\infty$, comme dans l'exemple suivant :

**Exemple 4.6.** *L'intégrale* $\int_0^{+\infty} u \cos\left(u^4\right)\, \mathrm{d}u$ *est convergente.*

En effet l'application $u \mapsto u^2$ est un $\mathrm{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ : l'intégrale $\int_0^{+\infty} u \cos\left(u^4\right)\, \mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos\left(u^2\right)\, \mathrm{d}t$ donc convergente.
Cependant, la fonction $f : u \mapsto u \cos\left(u^4\right)$ n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$ comme le montre la considération des valeurs prises par $f$ aux points $u = \sqrt[4]{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.

# INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE

Antoine Delcroix, IUFM de la Guadeloupe
(Antoine.Delcroix@iufm.univ-ag.fr)

## 1. Introduction

Dans l'optique du concours, le seul cadre pour lequel il est indispensable de connaître des théorèmes d'existence et de régularité est celui d'une fonction $\Phi : I \quad \mathbb{C}$ définie sur un intervalle $I$ à l'aide d'une intégrale dépendant d'un paramètre, avec un intervalle d'intégration compact.
Plus précisement, on supposera qu'il existe une application $f : I \times [\alpha\ \beta] \quad \mathbb{C}$, $(\alpha\ \beta) \quad \mathbb{R}^2$, $\alpha < \beta$ telle que pour tout $x \quad I$ :
*i.* l'application $t \quad f(x\ t)$ soit intégrable sur $[\alpha\ \beta]$
*ii.* $\Phi(x) = \int_\alpha^\beta f(x\ t)\,\mathrm{d}t$

Le programme se limitant à l'intégrale de Riemann, il n'est pas nécessaire de maîtriser des théorèmes de convergence dominée[1]. Cependant, si un candidat les connaît et sait les appliquer, par exemple dans des versions Riemann-Lebesgue, il est peu probable qu'on le pénalise pour cela.

Le cas d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale généralisée (par exemple sur un intervalle non bornée comme $[a\ +\quad[$) sera traité par une méthode décrite ci-dessous. C'est ce cas qui donne lieu à des questions importantes dans les problèmes. On présente donc deux exemples de mise en oeuvre, dans les premières épreuves des CAPES de 1988 et de 1993.

## 2. Cas d'un intervalle d'intégration compact. Théorèmes de régularité

### 2.1. Théorèmes de base

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a\ b) \quad \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f : I \times [a\ b] \quad \mathbb{C}$ une application.

**Théorème 2.1.** *On suppose $f$ continue sur $I \times [a\ b]$. Alors, la fonction*

$$\Phi : I \quad \mathbb{C} \quad x \quad \int_a^b f(x\ t)\,\mathrm{d}t$$

*est définie et continue sur l'intervalle $I$*

**Preuve.-** On effectue la preuve dans le cas d'un intervalle $I$ ouvert. Le lecteur s'en inspirera pour le cas d'un intervalle fermé, ou semi fermé : par exemple pour $I = [a\ b[$, il s'agit d'établir la continuité de $\Phi$ à droite en $a$.
Soit donc $I$ ouvert et $x_0 \quad I$ et $\quad > 0$. Il existe un intervalle $[x_0 - \delta\ x_0 + \delta]$ compact, voisinage de $x$, inclus dans $I$. L'application $f$ est uniformément continue sur $[x_0 - \delta\ x_0 + \delta] \times [a\ b]$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$(x\ x\ ) \quad [c\ d]^2 \qquad (t\ t\ ) \quad [a\ b]^2$$
$$(\ x - x \quad < \eta \text{ et } \ t - t \quad < \eta) = \quad f(x\ t) - f(x \quad t\ ) \ < \quad (b-a)$$

En particulier, pour tout $x \quad I$ tel que $\ x - x_0 \ < \min(\delta\ \eta)$, on sait que $x \quad [x_0 - \delta\ x_0 + \delta]$ et que

$$t \quad [a\ b] \qquad f(x\ t) - f(x_0\ t) \ < \quad (b-a)$$

D'où, comme la fonction $t \quad f(x\ t) - f(x_0\ t)$ est intégrable sur $[a\ b]$,

$$\left|\int_a^b (f(x\ t) - f(x_0\ t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \ f(x\ t) - f(x_0\ t) \ \mathrm{d}t \leq$$

Ainsi, à tout $\quad > 0$ est associé $\eta \ = \min(\delta\ \eta)$ tel que

$$x \quad I \qquad x - x_0 \ < \eta \ = \quad \Phi(x) - \Phi(x_0) \ \leq$$

[1]Ces théorèmes permettent des preuves plus simples à certains résultats de ce document.

**Théorème 2.2.** *On suppose que*
*i. L'application* $f$ *est continue sur* $I \times [a\ b]$,
*ii L'application* $f$ *admet une dérivée partielle* $f \quad x$, *notée* $f_x$ *dans la suite, sur* $I \times [a\ b]$ *et l'application* $f_x := \ f \quad x : I \times [a\ b] \quad \mathbb{C}$ *est continue.*
*Alors, la fonction*

$$\Phi : I \quad \mathbb{C} \quad x \quad \int_a^b f(x\ t)\,\mathrm{d}t$$

*est définie et de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur l'intervalle* $I$. *On a de plus*

$$x \quad I \quad \Phi\ (x) = \int_a^b f_x'(x\ t)\,\mathrm{d}t$$

**Preuve.-** On conserve le cadre d'un intervalle $I$ ouvert comme dans la preuve du théorème 2.1. Le théorème 2.1 appliqué à la fonction $f_x : I \times [a\ b] \quad \mathbb{C}$ montre que la fonction

$$G : I \quad \mathbb{C} \quad x \quad \int_a^b f_x'(x\ t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $I$. Il s'agit donc d'établir que $G$ est la dérivée de $\Phi$. Soit donc $x_0 \quad I$. Il suffit de montrer que les quantités (définies pour $h$ assez petit différent de zéro)

$$\Delta(h) = \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} - G(x) = \int_a^b \left( \frac{f(x+h\ t)-f(x\ t)}{h} - f_x'(x\ t) \right) \mathrm{d}t$$

admettent 0 pour limite pour $h$ tendant vers0, $h = 0$.

**Première méthode : la formule de Taylor avec reste intégral**

Soit donc $\quad > 0$. Pour tout $t \quad [a\ b]$, la fonction $\xi \quad f_x(x+\xi\ t)$ est intégrable sur $[0\ h]$. D'où

$$f(x+h\ t) - f(x\ t) = \int_0^h f_x'(x+\xi\ t)\,\mathrm{d}\xi = h\int_0^1 f_x'(x+\theta h\ t)\,\mathrm{d}\theta$$

(Le lecteur constatera qu'il s'agit de la formule de Taylor avec reste intégral d'ordre 0 )

Puis

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h\ t)-f(x\ t)}{h} - f_x'(x\ t) &= \int_0^1 f_x'(x+\theta h\ t)\,\mathrm{d}\theta - f_x'(x\ t) \\ &= \int_0^1 \left( f_x'(x+\theta h\ t) - f_x'(x\ t) \right) \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

De manière analogue à la preuve du théroème 2.1, la fonction $(x\ t) \quad f_x(x\ t)$ est uniformément continue sur un intervalle $[x-\delta\ x+\delta] \times [a\ b]$ inclus dans $I \times [a\ b]$. Il existe donc $\eta > 0$ (que l'on peur choisir inférieur à $\delta$) tel que

$$t \quad [a\ b] \quad k \quad ]-\eta\ \eta[ \quad \left| f_x'(x+k\ t) - f_x'(x\ t) \right| < \quad (b-a)$$

On a alors

$$t \quad [a\ b] \quad \left| \frac{f(x+h\ t)-f(x\ t)}{h} - f_x'(x\ t) \right| \leq \int_0^1 \left| f_x'(x+\theta h\ t) - f_x'(x\ t) \right| \mathrm{d}\theta \leq \frac{\quad}{b-a}$$

D'où

$$\Delta(h) \ \leq \int_a^b \left| \frac{f(x+h\ t)-f(x\ t)}{h} - f_x'(x\ t) \right| \mathrm{d}t \leq$$

Ainsi $\lim_{h \quad 0\ h=0} \Delta(h) = 0$ et le résultat est démontré.

**Deuxième méthode : inégalité des accroissements finis**

Cette méthode est basée sur la remarque suivante. Introduisons la fonction (de classe $C^1$)

$$\phi_t : h \quad f(x+h\ t) - hf_x(x\ t)$$

La quantité

$$f(x+h\ t) - f(x\ t) - hf_x(x\ t)$$

s'écrit $\phi_t(h) - \phi_t(0)$ quantité majorable en utilisant

$$\phi_t(h) = (f_x)(x+h\ t) - (f_x)(x\ t)$$

Soit $\ > 0$. Comme dans la première méthode, la fonction $(x\ t) \quad f_x(x\ t)$ est uniformément continue sur un intervalle $[x-\delta\ x+\delta] \times [a\ b]$ inclus dans $I \times [a\ b]$. Il existe donc $\eta > 0$ (que l'on peur choisir inférieur à $\delta$) tel que

$$t \quad [a\ b] \qquad k \quad ]-\eta\ \eta[ \qquad \left|\phi_t(k)\right| = \left|f_x'(x+k\ t) - f_x'(x\ t)\right| < \quad (b-a)$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à $\phi_t$ entre 0 et $h$, $\ h\ \leq \eta$, on a

$$t \quad [a\ b] \qquad h \quad ]-\eta\ \eta[ \qquad \phi_t(h) - \phi_t(0) \ = \ f(x+h\ t) - hf_x(x\ t) - f(x\ t) \ \leq \frac{\ h}{b-a}$$

D'où

$$\left|\int_a^b \left(f(x+h\ t) - f(x\ t) - hf_x'(x\ t)\right) \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \ \phi_t(h) - \phi_t(0)\ \mathrm{d}t \leq \ h$$

Ainsi $\lim_{h \ \ 0\ h=0} \Delta(h) = 0$ et le résultat est démontré.

### 2.2. Régularité supérieure

On dispose du résultat suivant, dont la peuve se fait par récurrence à partir du théorème 2.2.

**Théorème 2.3.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a\ b) \quad \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, $f : I \times [a\ b] \quad \mathbb{C}$ une application et $n$ un entier. On suppose que*
*i. L'application $f$ est continue sur $I \times [a\ b]$,*
*ii L'application $f$ admet des dérivées partielle $\ ^m f \quad x^m$ jusqu'à l'ordre $n$* (resp. *à tout ordre), sur $I \times [a\ b]$ et, pour tout $m \leq n$* (resp. *pour tout $m$) les applications $\ ^m f \quad x^m : I \times [a\ b] \quad \mathbb{C}$ sont continues.*
*Alors, la fonction*

$$\Phi : I \quad \mathbb{C} \quad x \quad \int_a^b f(x\ t)\,\mathrm{d}t$$

*est définie et de classe $C^m$* (resp. C ) *sur l'intervalle $I$. On a de plus*

$$m \leq n \quad (resp. \quad m \quad \mathbb{N}), \quad x \quad I \quad \Phi^{(m)}(x) = \int_a^b (\ ^m f \quad x^m)(x\ t)\,\mathrm{d}t$$

### 2.3. Un exercice

**Exercice 1.** - Soit $f : \mathbb{R} \quad \mathbb{C}$ une application continue, $g : [a\ b] \quad \mathbb{C}$ $((a\ b) \quad \mathbb{R}^2$ et $a < b)$ une application de classe $C^1$.
*i.* Vérifier que la formule $H(x) = \int_a^b f(x+t)g(t)\mathrm{d}t$ définit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
*ii* On suppose dans cette question $f$ de classe $C^1$. Vérifier que $H$ est de classe $C^1$. On calculera sa dérivée.
*iii* On revient aux hypothèses initiales. Montrer que $H$ est de classe $C^1$.

## 3. Cas d'une intégrale généralisée

### 3.1. Description de la méthode

La situation typique est la suivante. On dispose de $f : I \times [a\ + \quad [\quad \mathbb{C}$, $\alpha \quad \mathbb{R}$ et on souhaite étudier la définition et régularité de la fonction $\Phi : x \quad \int_a^{+} \ f(x\ t)\,\mathrm{d}t$.

### 3.1.1. Premier point : la définition de $\Phi$

On est donc amené à vérifer que

$$\text{pour tout } x \quad I \text{ l'intégrale } \int_a^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.} \qquad \text{(C1)}$$

Ainsi, le premier problème posé est un problème de famille d'intégrales généralisées dont il s'agit détudier la convergence.

**Remarque 1.** Convergence normale de familles d'intégrales.- *Un cas particulier intéressant est celui ou il existe une application $g : [a \ + \quad [ \quad \mathbb{R}_+$ telle que :*
*i. l'application $g$ est localement intégrable sur $[a \ + \quad [$ et l'intégrale généralisée $\int_a^{+} \quad g(t)\,\mathrm{d}t$ converge,*
*ii. pour tout $(x \ t) \quad I \times [a \ + \quad [, \ f(x \ t) \ \leq g(t)$*
*Alors, pour tout $x \quad I$, l'intégrale $\int_a^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.*
*On dit que la famille d'intégrales $\left(\int_a^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t\right)_{x \quad I}$* est normalement convergente.

### 3.1.2. Deuxième point : la régularité de $\Phi$ (continuité, dérivabilité)

Dans les problèmes de CAPES on se ramène à un problème de suite, ou de série de fonctions selon ce qui est techniquemnt le plus commode (voir en fin de paragraphe).

**Avec une suite de fonctions. Continuité**

On considère donc $f : I \times [a \ + \quad [ \quad \mathbb{C}, \ a \quad \mathbb{R}$. On suppose ici que $f$ est continue sur $I \times [a \ + \quad [$ et que la condition C1 est réalisée. Ainsi, la fonction

$$\Phi : I \quad \mathbb{C} \quad x \quad \int_a^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t$$

est définie sur $I$.

On pose, pour tout $n \geq a$

$$x \quad I \qquad {}_n(x) = \int_a^n f(x \ t)\,\mathrm{d}t$$

La condition C1 assure la convergence de l'intégrale $\int_a^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \quad I$ : ainsi, a fortiori la suite $(u_n(x))_{n\geq a}$ converge vers $\int_a^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t$. La suite $( \quad {}_n)_{n\geq a}$ est donc simplement convergente.

Comme $f$ est supposée continue sur $I \times [a \ + \quad [$, $f$ est en particulier continue sur $I \times [a \ n]$ : le théorème 2.1 assure que la fonction ${}_n$ est continue sur $I$. On est donc ramené à un problème de continuité de la limite d'une suite de fonctions continues.
On rappelle que :

**Théorème 3.1.** *Soit $(\psi_n : J \quad \mathbb{C})_{n\geq n_0}$ une suite d'applications continues sur $I$. On suppose que la suite $(\psi_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformément (resp. compactement) sur $I$. Alors la limite de la suite $(\psi_n)_{n\geq n_0}$ est continue sur $J$.*

Il reste donc à montrer (c'est souvent le pas difficile) que la suite $( \quad {}_n)_{n\geq a}$ converge uniformément sur $I$, ou du moins compactement.

**Exemple.** On reprend les notations et les hypothèses de la remarque 1. On a alors

$$n \geq a \quad x \quad I \quad \Phi(x) - \quad {}_n(x) = \int_a^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t - \int_a^n f(x \ t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t$$

(On rappelle que l'intégrale $\int_a^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t$ converge.) Comme

$$(x \ t) \quad I \times [a \ + \quad [ \qquad f(x \ t) \ \leq g(t)$$

il vient

$$n \geq a \quad x \quad I \quad \Phi(x) - \quad {}_n(x) \ \leq \left|\int_n^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_n^{+} \quad f(x \ t) \ \mathrm{d}t\right| \leq \int_n^{+} \quad g(t)\,\mathrm{d}t$$

(Ici aussi chacune des intégrales écrites converge par hypothèse.)
Comme $\lim_{n \quad +} \quad \int_n^{+} \quad g(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on a $\sup_{x \quad I} \ \Phi(x) - \quad {}_n(x) \quad {}^{n \quad +} \quad 0$. Ainsi la suite $( \quad {}_n)_{n\geq a}$ converge uniformément vers $\Phi$ sur $I$.

**Avec une suite de fonctions. Dérivabilité et continuité de la dérivée**

On considère donc $f : I \times [a + \quad [ \quad \mathbb{C}, \alpha \quad \mathbb{R}$. En s'inspirant des hypothèses du théorème 2.2, on suppose ici que :

*i.* L'application $f$ est continue sur $I \times [\alpha \ \beta]$,

*ii* L'application $f$ admet une dérivée partielle $f_x$ sur $I \times [\alpha \ \beta]$ et l'application $f_x : I \times [\alpha \ \beta] \quad \mathbb{C}$ est continue.

*iii.* la condition C1 est réalisée pour $f$ et $f_x$ *id est*

$$\text{pour tout } x \quad I \quad \text{les intégrales } \int_a^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^{+} \quad f_x(x \ t)\,\mathrm{d}t \text{ convergent.} \qquad \text{(C2)}$$

Ainsi, avec les notations ci-dessus, le théorème 2.2 assure que chaque fonction $\quad_n$ $(n \geq n_0)$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $I$, avec

$$n \geq a \quad x \quad I \qquad _n(x) = \int_a^n f_x f(x \ t)\,\mathrm{d}t$$

On est donc ramené à un problème de régularité de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathrm{C}^1$. On rappelle que :

**Théorème 3.2.** *Soit $(\psi_n : J \quad \mathbb{C})_{n \geq n_0}$ une suite d'applications de classe $C^1$ sur $I$. On suppose que la suite $(\psi_n)_{n \geq n_0}$ converge simplement sur $I$, que la suite $\left(\psi_n\right)_{n \geq n_0}$ converge uniformément (resp. compactement) sur $I$. Alors la limite de la suite $(\psi_n)_{n \geq n_0}$ est de classe $C^1$ sur $J$.*

Les conditions C2 assurent la convergence simple des suites $(\psi_n)_{n \geq n_0}$ et $\left(\psi_n\right)_{n \geq n_0}$. Il reste à étudier, au cas par cas, la convergence uniforme ou du moins compacte de la suite $\left(\psi_n\right)_{n \geq n_0}$ pour conclure.

**Exemple.** En appliquant la notion introduite dans la remarque 1 et le raisonnement de l'exemple du paragraphe ci-dessus, on remarque que la suite $\left(\psi_n\right)_{n \geq n_0}$ converge uniformément si la famille d'intégrales $\left(\int_a^{+} \quad (f_x)(x \ t)\,\mathrm{d}t\right)_{x \quad I}$ converge normalement.

**Avec une série de fonctions**

On reprend les notations précédentes. Exposons briévement la méthode pour le cas de la continuité. Notons $n_0 = \mathrm{E}[a] + 1$, ou $\mathrm{E}[a]$ désigne la partie entière du réel $a$. On pose

$$x \quad I \quad u_{n_0}(x) = \int_a^{n_0} f(x \ t)\,\mathrm{d}t \qquad n > n_0 \quad u_n(x) = \int_n^{n+1} f(x \ t)\,\mathrm{d}t$$

Comme ci-dessus, la condition C1 assure la convergence simple de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et montre que $\sum_{n=n_0}^{+} u_n(x) = \int_a^{+} \quad f(x \ t)\,\mathrm{d}t$.

Le théorème 2.1 montre également qu'ici chaque $u_n$ est une fonction continue sur $I$. On est ramené cette fois à un problème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues. En pensant à l'analogue du théorème 3.1 pour les séries, on voit qu'il reste à montrer que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge uniformément sur $I$, ou du moins compactement.

**Exemple.** On reprend les notations et les hypothèses de la remarque 1. On a ici

$$n > n_0 \quad x \quad I \qquad u_n(x) \ \leq \int_n^{n+1} \ f(x \ t) \ \mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, l'intégrale $\int_a^{+} \quad g(t)\,\mathrm{d}t$ étant convergente, la série de terme général $\alpha_n := \int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. (On a en effet, pour tout $N > n_0$, $\sum_{n=n_0}^{N} \alpha_n = \int_a^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$ et la convergence de la série vient de celle de $\int_a^{+} \quad g(t)\,\mathrm{d}t$.)

Ainsi la série $\sum u_n(x)$ converge *normalement* sur $I$, donc uniformément.

### 3.1.3. Extensions de la méthode

**Régularités supérieures**

On laisse au lecteur le soin de rédiger les conditions sur $f$ afin d'assurer le caractère $\mathrm{C}^p$ $(p \quad \mathbb{N} \quad + \quad$ . Ces conditions portent sur la régularité de $f$, pour lesquelles on s'inspire du théorème 2.3 et sur l'existence d'intégrales généralisées (conditions analogues à (C1) et (C2)).

**Cas d'autre types d'intervalles semi ouverts ou ouverts**

Il s'agit d'intervalles bornés semi ouverts ou ouverts, d'intervalles non bornées ouverts. Eventuellement le problème peut donc être un problème d'intégrales doublement impropres. On adapte la méthode à chacun de ces types d'intervalles. Par exemple :

- pour un intervalle du type $[a\ \ b[$, $(a\ \ b)\quad \mathbb{R}^2$, $a < b$ , on pourra considérer la suite définie pour $n$ assez grand par

$$x \quad I \qquad {}_n(x) = \int_a^{b-1\ \ n} f(x\ \ t)\,\mathrm{d}t\,;$$

- pour un intervalle du type $]a\ +\quad[$, $a\quad \mathbb{R}^2$, on pourra considérer la suite définie pour $n > 0$ par

$$x \quad I \qquad {}_n(x) = \int_{a+1\ \ n}^{n} f(x\ \ t)\,\mathrm{d}t$$

Dans ce dernier cas, la fonction $\Phi$ : $]a\ +\quad[\qquad \mathbb{C}$, $x\qquad \int_a^{+}\ \ f(x\ \ t)\,\mathrm{d}t$ est définie par une intégrale doublement généralisée.

### 3.2. Exemples d'utilisation dans des épreuves du CAPES

*On donne ci-dessous une analyse de la méthode, telle qu'elle est mise en oeuvre dans deux textes de première épreuve du CAPES.*

#### 3.2.1. La première épreuve du CAPES de 1988

Cette épreuve porte sur notamment sur la constante d'Euler $\gamma$ et la fonction $\Gamma$. On montre notamment que l'intégrale (doublement généralisée)

$$\Gamma(x) = \int_0^{+}\ \ \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

est convergente pour tout $x > 0$, définissant ainsi la fonction $\Gamma$ sur $]0\ +\quad[$.

Pour montrer que la fonction $\Gamma$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $]0\ +\quad[$, on utilise la méthode décrite ci-dessus, dans la variante suivante. On introduit la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$x \quad ]0\ +\quad[ \qquad \Gamma_n(x) = \int_{1\ \ n}^{n} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

On montre que chaque $\Gamma_n$ $(n \geq 1)$ est de classe $\mathrm{C}^1$.
Puis on établit que :
*i.* la suite $\Gamma_n$ converge uniformément sur tout compact $[a\ \ b] \subset\ ]0\ +\quad[$ vers $\Gamma$ (la convergence simple, qui est acquise, suffirait) ;
*ii.* l'intégrale $F(x) = \int_0^{+}\ \ \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ln t\,\mathrm{d}t\ \ F(x)$ est convergente pour tout $x\quad ]0\ +\quad[$ ;
*iii.* la suite $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout compact $[a\ \ b] \subset\ ]0\ +\quad[$ vers la fonction $F$
Ainsi, le schéma décrit plus haut est réalisé : la fonction $\Gamma$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $]0\ +\quad[$, de dérivée $F$.

#### 3.2.2. La première épreuve du CAPES de 1993

Le problème porte sur un procédé de régularisation de fonctions continues. On considère l'espace vectoriel $E$ des fonctions $\phi : ]0\ +\quad[\qquad \mathbb{R}$, continues, bornées et telles que

$$\text{pour tout } x > 0, \text{ l'intégrale } S\phi\,(x) = \int_0^{+}\ \ \frac{t\phi(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

On considère sur $E$ l'opérateur $S : \phi\qquad S\phi$ et l'objet de la première partie est essentiellement (question I.3.) de démontrer que $S\phi$ est une fonction de classe $\mathrm{C}\quad$ sur $]0\ +\quad[$.

On introduit, pour se faire, la série de fonctions $\sum u_n$ de terme général

$$u_n : ]0\ +\quad[\qquad \mathbb{R}\qquad x\qquad \int_n^{n+1} \frac{t\phi(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On montre alors succesivement les propriétés suivantes. (On indique ci-dessous un sketch de démonstration pour chacune.)

$a$ La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0\ +\quad[$ vers $S\phi$.
En effet, si $S_n$ désigne la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_n$ on a

$$x \quad ]0\ +\quad[ \qquad S_n(x) = \int_0^{n+1} \frac{t\phi(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

La convergence de l'intégrale $S\phi(x) = \int_0^{+}\ \ t\phi(t)\ \ \left(x^2+t^2\right)\,\mathrm{d}t$ entraine alors celle de $S_n$ vers la même limite.

$b$ Pour tout entier $n$, la fonction $\sum u_n$ est de classe C sur $]0\ +\quad[$.
En effet, l'application

$$f_n : ]0\ +\quad[\times[n\ \ n+1] \qquad \mathbb{R} \quad (x\ \ t) \qquad \frac{t\phi(t)}{x^2+t^2}$$

est de classe C sur son ensemble de définition. Une application d'une variante du théorème 2.2 donne le résultat. De plus, pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$x \quad ]0\ +\quad[ \qquad u_n^{(k)}(x) = \int_n^{n+1} \frac{^k}{x^k}\left(\frac{t\phi(t)}{x^2+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$c$ et $d$ Pour tout entier $k \geq 1$, on établit, dans ces deux questions, la convergence normale de la série $\sum u_n^{(k)}$ sur tout intervalle $[a\ +\quad[\ (a>0)$.
Pour se faire on établit d'abord la majoration

$$(x\ \ t) \quad \mathbb{R}^2 \quad (0\ \ 0) \qquad \left|\frac{^k}{x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \frac{k!}{(x^2+t^2)^{(k+1)\ \ 2}}$$

(Indication : écrire $t\ \ \left(x^2+t^2\right) = (1\ \ 2i)\,(1\ \ (x+it) - 1\ \ (x-it))\ \ )$
On en déduit l'existence d'une constante $A_k > 0$ telle que

$$x \geq a \qquad n \geq 0 \qquad \left|u_n^{(k)}(x)\right| \leq A_k \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^{(k+1)\ \ 2}}$$

La convergence de l'intégrale $\int_0^{+}\ \ 1\ \ \left(a^2+t^2\right)^{(k+1)\ \ 2}\mathrm{d}t$, indépendante de $x$, entraine la convergence normale de la série $\sum u_n^{(k)}$ sur $[a\ +\quad[$.

$e$ Soit $a>0$. D'après les questions précédentes, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[a\ +\quad[$ et, pour tout entier $k \geq 1$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a\ +\quad[$. Une variante du théorème 3.2 assure alors que la somme $S\phi$ de la série est de classe C sur $[a\ +\quad[$
Les intervalles $([a\ +\quad[)_{a>0}$ formant une famille d'intervalles emboités, l'application $S\phi$ est de classe C sur leur réunion $\ _{a>0}[a\ +\quad[$, c'est-à-dire sur $]a\ +\quad[$.

### 3.3. Un exercice

*L'exercice ci-dessous rassemble beaucoup d'objets importants du programme : suites de fonctions, intégrales généralisées, équation différentielle.*

**Exercice 2.**
1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(t\ \ u) \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \quad f(t\ \ u) = (\sin tu)\ \ (u(1+u^4)) \qquad\qquad t \quad \mathbb{R} \quad f(t\ \ 0) = t$$

1.1. Montrer que la fonction $f$ est de classe C .
1.2.a. Montrer que la fonction $F : t \quad \int_0^{+}\ \ f(t\ \ u)\,\mathrm{d}u$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.
1.2.b. Montrer que pour $m \quad 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4$ les fonctions $F_m : t \quad \int_0^{+}\ \ (\ \ ^m f\ \ \ t^m)(t\ \ u)\,\mathrm{d}u$ sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
1.3. On définit, pour $m \quad 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4$ , les suites de fonctions $(G_{m\ n})_{n\ \ \mathbb{N}^*}$ par

$$t \quad \mathbb{R}_+^* \qquad n \quad \mathbb{N}^* \qquad G_{m\ n}(t) = \int_0^n(\ \ ^m f\ \ \ t^m)(t\ \ u)\,\mathrm{d}u$$

Montrer que pour $m \quad 1\ 2\ 3$ , les suites $(G_{m\ n})_{n\ \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la suite $(G_{4\ n})_{n\ \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle du type $[a\ + \quad [$ ($a$ réel strictement positif). En déduire que la fonction $F$ est de classe $\mathrm{C}^4$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.1. Montrer que $F$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'E.D. (1) $y^{(4)} + y = \pi\ \ 2$.
2.2. Résoudre l'E.D. (1).
2.3. En déduire que

$$t \quad \mathbb{R}_+^* \qquad F(t) = \pi\ \ 2(1 - \exp(-t \quad \overline{2}) \cos(t \quad \overline{2}))$$

*Nota.* On pourra admettre, pour cet exercice, que $\int_0^{+} \quad (\sin v) \quad v \, \mathrm{d}v = \pi\ \ 2$.

IUFM de la Guadeloupe
PLC1-Mathématiques
Année 2006-2007

Memento de
**calcul différentiel**

# 1. Introduction et notations

## 1.1. Introduction

L'objet du calcul différentiel est l'approximation locale des fonctions par une fonction linéaire, la différentielle. Bien que la notion de différentielle soit intrinsèque et non liée en particulier aux questions de dimension des espaces sur lesquels sont définies les applications considérées, nous nous limiterons ici au cas des applications définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) et à valeurs dans un espace vectoriel normé, qui sera souvent $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}$), ce qui suffit dans le cadre du programme du concours.

## 1.2. Notations, rappels et conventions

($a$) Dans la suite, tous les ouverts considérés seront supposés non vide, sans que cela soit explicitement rappelé. On note toutes les normes intervenants $\|\cdot\|$, car il n'y a pas de risque de confusion.

($b$) Pour un entier $p \geq 0$, on note $\mathbb{N}_p$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, p\}$ et lorsque l'on parlera de $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{R}^q$, il est sous entendu que $m$, $p$ ou $q$ sont des entiers strictement positifs.

($c$) Pour deux espaces vectoriels réels $E$ et $F$, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $E$ dans $F$. Si $l$ désigne un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ et $h$ de $E$, on note $l \cdot h$, de préférence à $l(h)$, l'image par $l$ de $h$.

($d$) *Applications linéaires continues.*- Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|))$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On rappelle que :

**Proposition 1.1.** *Soit* $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
(1) *Sont équivalentes :*
($i$) *l'application* $u$ *est continue sur* $E$,
($ii$) *l'application* $u$ *est continue en* $0$,
($iii$) *il existe un réel* $k \geq 0$ *tel que :* $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq k\,\|x\|$,
($iv$) *l'application* $u$ *est lipschitzienne,*
($v$) *l'application* $u$ *est uniformément continue.*
(2) *Si* $u$ *satisfait une des propriétés précédentes, on a de plus*

$$\inf\{k \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq k\,\|x\|\} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}. \tag{1.1}$$

Lorsque $u$ satisfait une des assertions $(i) - (v)$, le réel défini par les égalités (1.1) s'appelle la *norme* de l'application $u$.

**On suppose dorénavant $E$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.**

($e$) On rappelle qu'alors toute application linéaire de $E$ dans $F$ est continue.
En effet, pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, où $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $E$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $x$ dans cette base. On en déduit que

$$\|u(x)\| \leq \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|\,\|u(e_i)\| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} \|u(e_i)\| \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|\,,$$

par linéarité de $u$ et par l'inégalité triangulaire. L'application $x \mapsto \sum_{k=1}^n |x_i|$ est une norme sur $E$. Comme $E$ est de dimension finie, toutes les normes sur $E$ sont équivalentes. Il existe ainsi $\beta > 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\sum_{k=1}^n |x_i| \leq \beta\,\|x\|$. Ainsi :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq \beta \max_{1\leq i\leq n} \|u(e_i)\|\,\|x\|\,.$$

Ainsi, $u$ est continue, avec $k = \beta \max_{1\leq i\leq n} \|u(e_i)\|$.

($f$) On vérifie que l'application

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R},\quad l \mapsto \sup_{\|h\|=1} \|l \cdot h\|$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. (Remarque.- $\|\cdot\|$ peut être définie par l'une des formulations des égalités (1.1).) Ainsi, $\mathcal{L}(E, F)$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel normé.

# 2. Applications différentielles

## 2.1. Notion d'application différentiable

### 2.1.1. Différentielle en un point

On désigne par $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $a$ un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ à valeurs dans un espace normé $F$.

**Proposition 2.1.** *S'il existe une application linéaire $l$ appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F)$ telle que*

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \left(f(a+h) - f(a) - l\cdot h\right)/\|h\| = 0. \tag{2.1}$$

*Alors cette application $l$ est unique.*

La démonstration de ce théorème est largement analogue à celle du cas des fonctions de la variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé. On pose alors :

**Définition 2.2.** *S'il existe une application $l$ appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F)$ telle que la propriété 2.1 soit vérifiée, on dit que $f$ est* différentiable *au point $a$ et l'application $l$ s'appelle la* différentielle *de $f$ au point $a$. On notera alors $l = Df(a)$.*

**Remarques**
1. Dans le cadre plus général d'une application $f$ définie sur un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension infinie, il faut imposer à l'application linéaire $l$ d'être *continue*. Cette condition est réalisée dans le cadre présent puisque $\mathbb{R}^m$ est de dimension finie (*cf.* sous-section 1.2, point (*e*)).
2. Le lecteur est invité à constater qu'une fonction $f$ définie sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles est différentiable en un point $a$ de $I$ si, et seulement si, $f$ est dérivable en $a$. On a dans ce cas

$$\forall h \in \mathbb{R},\ \ Df(a)\cdot h = hf'(a) \quad ; \quad f'(a) = Df(a)\cdot 1.$$

3. Revenons au cas général. Comme $\Omega$ est ouvert l'application $f$ est définie sur un voisinage de $a$. La propriété (2.1) est équivalente à l'existence d'une fonction $\varepsilon(h)$ définie sur un voisinage de 0 telle que

$$f(a+h) = f(a) + l\cdot h + \|h\|\varepsilon(h) \ \ , \ \ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0,$$

ou encore à la propriété

$$f(a+h) = f(a) + l\cdot h + \circ(\|h\|). \tag{2.2}$$

On déduit facilement de la forme (2.2) de la définition la proposition :

**Proposition 2.3.** *Avec les notations ci-dessus, si l'application $f$ est différentiable au point $a$, alors $f$ est continue au point $a$.*

**Remarque**.- La réciproque est bien sûr fausse, comme le montre l'exemple de la fonction de la variable réelle $x \mapsto |x|$ continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 0.

**Exemple**.- Soit $F$ un espace normé. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F)$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^m$, de différentielle elle-même. En effet $u$ est continue et vérifie

$$\forall h \in \mathbb{R}^m,\ \ u(a+h) = u(a) + u\cdot h.$$

Pour une application $f$ définie comme ci-dessus sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ mais à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ on définit les *applications composantes* $f_1$, $f_2$,..., $f_p$ (à valeurs réelles) par

$$\forall j \in \mathbb{N}_p,\ f_j = P_j \circ f,$$

où $P_j$ est la projection canonique de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}$, associant à un vecteur sa $j^{ième}$ composante. On a donc, pour $x \in \Omega$,

$$f(x) = (f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_p(x)).$$

On montre alors la proposition :

**Proposition 2.4.** *Avec les notations de la remarque ci-dessus, l'application $f$ est différentiable au point $a$ si, et seulement si, chacune des applications composante $f_1$, $f_2$, ..., $f_p$ est différentiable au point $a$. On a alors*

$$Df(a) = \left(Df_1(a), Df_2(a), \ldots, Df_p(a)\right).$$

Cette propriété reste vraie dans le cas plus général d'une application $f$ à valeurs dans un produit fini d'espaces normés, pour laquelle on définit de manière analogue la notion d'applications composantes.

### 2.1.2. Différentiabilité sur un ouvert

On désigne par $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f$ une application de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$.

**Définition 2.5.** *On dit que l'application $f$ est* différentiable sur $\Omega$ *si elle est différentiable en tout point de $\Omega$.*

On dispose alors d'une application $Df$ définie sur l'ouvert $\Omega$ à valeurs dans l'espace normé $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F)$ (*cf.* sous-section 1.2, point ($e$)). La définition suivante a alors un sens.

**Définition 2.6.** *On dit que l'application $f$ est* continûment différentiable *(ou* de classe $\mathrm{C}^1$*) sur $\Omega$ si elle est différentiable sur $\Omega$ et si l'application $Df$ est continue sur $\Omega$.*

On démontre facilement la propriété algébrique suivante :

**Théorème 2.7.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $F$ un espace vectoriel normé. L'ensemble des applications de $\Omega$ à valeurs dans $F$ différentiable (resp. continûment différentiable) est un espace vectoriel réel.*

Dans le cas particulier d'une application $f$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ différentiable, on appelle *rang* (en un point $a$) de $f$, le rang de l'application linéaire $Df(a)$. Le rang est majoré par $\min(m,p)$. Si au point $a$ le rang de $f$ est strictement inférieur à $\min(m,p)$, le point $a$ est dit *critique*. Sinon le point $a$ est dit *régulier*.

## 2.2. Notion de dérivées partielles

### 2.2.1. Dérivée selon un vecteur

De nouveau, $\Omega$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $a$ un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$.

**Définition 2.8.** *Soit $v$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$ non nul. On dit que $f$ admet une* dérivée partielle au point $a$ suivant le vecteur $v$ *si la fonction, définie sur un voisinage de 0 par $t \mapsto f(a+tv)$ et à valeurs dans $F$ est dérivable en $t=0$.*

On appelle alors *dérivée partielle au point $a$ suivant le vecteur $v$*, le vecteur

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} \left(f(a+tv) - f(a)\right)/t$$

On vérifie facilement (écrire les définitions) la proposition suivante.

**Proposition 2.9.** *Avec les notations ci-dessus, si l'application $f$ est différentiable au point $a$, alors $f$ admet une dérivée partielle suivant tout vecteur $v$ non nul.*

**Remarque.**- La réciproque est fausse. On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'application définie ci-dessous fournit un contre-exemple

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;\; ; \;\; f(x,y) = y^2/x, \text{ si } x \neq 0, \; f(0,y) = 0.$$

### 2.2.2. Dérivées partielles, matrice jacobienne

On note $\mathcal{B}_m = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et l'on reprend $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $a$ un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$. On pose :

**Définition 2.10.** *Soit $i$ un entier de $\mathbb{N}_m$. On dit que l'application $f$ possède une* dérivée partielle au point $a$ par rapport à la $i^{ième}$ variable *si $f$ admet une dérivée partielle au point $a$ suivant le vecteur $e_i$.*

**Remarque.**- Il revient au même de dire en notant $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ que la fonction définie dans un voisinage de 0 par $t \mapsto f(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_m)$ est dérivable en $t = 0$.

On utilise pour les dérivées partielles, les deux notations suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i}(a) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \left(f(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_m) - f(a)\right)/t.$$

On dispose de l'analogue de la proposition 2.4.

**Proposition 2.11.** *Soit $f$ une application définie sur un ouvert $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $a$ un point de $\Omega$. L'application $f$ est possède une dérivée partielle au point $a$ par rapport à la $i^{ième}$ variable si et seulement si chacune des applications composantes $f_1$, $f_2$, ..., $f_p$ est une dérivée partielle au point $a$ par rapport à la $i^{ième}$ variable. On a alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a)\right).$$

Lorsque l'application $f$ possède au point $a$ une dérivée partielle par rapport à chacune des variables, on définit avec les notations de la proposition 2.11, la *matrice jacobienne* de $f$ au point $a$, notée $J_f(a)$ ou bien $Jac_f(a)$, par l'égalité

$$J_f(a) = Jac_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

On dira qu'une application définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est *partiellement dérivable* par rapport à la $i^{ième}$ variable si $f$ possède en tout point de $\Omega$ une dérivée partielle par rapport à la $i^{ième}$ variable. On dispose alors de l'application *dérivée partielle* $f^{'}_{x_i}$, définie sur $\Omega$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ par $f^{'}_{x_i} \ : a \mapsto f^{'}_{x_i}(a)$.

On définit de manière analogue une application partiellement dérivable par rapport à toutes les variables. On définit alors l'application $J_f$ définie sur $\Omega$ et à valeur dans $\mathrm{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ par $J_f : a \mapsto J_f(a)$.

### 2.2.3. Lien entre l'existence de dérivées partielles et la différentiabilité

La proposition 2.9 entraîne le théorème suivant :

**Proposition 2.12.** *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $a$ un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$. Si $f$ est différentiable au point $a$ alors $f$ possède des dérivées partielles en ce point.*

Cependant la réciproque de la proposition 2.12 est fausse. Considérons l'application $f$ à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = xy/(x^2 + y^2) \ ; \quad f(0, 0) = 0.$$

On constate que pour $x \neq 0$, on a $f(x, x) = 1/2$ ce qui interdit à $f$ d'être continue en $(0, 0)$. Elle n'est donc pas différentiable en ce point. Cependant $f$ possède des dérivées partielles en $(0, 0)$ par rapport à $x$ et $y$ (qui sont nulles puisque $f(x, 0) = f(0, y) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$).

Moyennant l'ajout d'une hypothèse de continuité portant sur la différentielle ou des dérivées partielles, on obtient :

**Théorème 2.13.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f$ une application de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$. les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
*(1) l'application $f$ est continûment différentiable sur $\Omega$.*
*(2) l'application $f$ admet des dérivées partielles (par rapport à chaque variable) continues sur $\Omega$.*
*De plus, si l'une des deux conditions est satisfaite et si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, la matrice de la différentielle de $f$ en un point $a \in \Omega$, relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^p$, est la matrice jacobienne $Jac_f(a)$.*

Ce résultat est vrai dans le cadre beaucoup plus général d'applications définies sur un produit fini d'espaces vectoriels normés, à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés pour lesquelles la notion de dérivée partielle est remplacée par celle de *différentielle partielle*.

## 2.3. Différentielle d'une application composée

On considère dans ce paragraphe $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $\Omega'$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f$ une application définie de $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, $g$ une application définie de $\Omega'$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$. Soit encore $a \in \Omega$ et $b = f(a)$. Avec ces notations on a :

**Théorème 2.14.** *Si l'application $f$ est différentiable au point $a$ et si $g$ est différentiable au point $b$ alors $g \circ f$ (qui est définie sur $\Omega$) est différentiable au point $a$ et de plus*

$$D(g \circ f) = Dg(f(a) \circ Df(a).$$

La démonstration de ce théorème est dans le principe analogue à celle du cas des fonctions de la variable réelle. On laisse au lecteur le soin de retrouver ce cas particulier à l'aide de l'énoncé précédent.

### 2.4. Inégalité des accroissements finis

On rappelle d'abord qu'étant donné deux points $a$ et $b$ de $\mathbb{R}^m$, le *segment fermé* d'extrémité $a$ et $b$ (noté $[a,b]$) est l'image de l'application $\lambda$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ définie sur $[0,1]$ par $\lambda : t \mapsto a + t(b-a)$. On définit de manière analogue les segments ouverts et semi-ouverts que l'on notera respectivement $]a,b[$ et $]a,b]$ (ou $[a,b[$).

**Théorème 2.15.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f$ une application de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$, $a$ un point de $\Omega$ et $h \in \mathbb{R}^m$ tel que le segment $[a, a+h]$ soit inclus dans $\Omega$. On suppose que l'application $f$ est continue en tout point de $[a, a+h]$ et différentiable en tout point de $]a, a+h[$. On suppose de plus qu'il existe $M$ réel positif majorant en tout point de $]a, a+h[$ la norme de $Df$. On a alors*

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq M\|h\|.$$

Ce théorème résulte de l'application de la classique inégalité des accroissements finis pour le cas des fonctions de la variable réelle et à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$, à l'application $\varphi$ définie sur $[0,1]$ par $\varphi : t \mapsto f(a+th)$. C'est un bon exercice de calcul différentiel d'écrire dans le détail cette démonstration.

**Corollaire 2.16.** *Soit $f$ une application différentiable d'un ouvert convexe $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$ dont la différentielle est majorée en norme sur $\Omega$ par un réel $M$ positif. On a alors*

$$\forall (x,y) \in \Omega^2, \quad \|f(y) - f(x)\| \leq M\|y - x\|.$$

*Autrement dit, $f$ est $M$-lipschitzienne sur $\Omega$.*

L'hypothèse de convexité assure que pour tout $(x,y) \in \Omega^2$, le segment $[x,y]$ est inclus dans $\Omega$.

**Corollaire 2.17.** *Soit $f$ une application différentiable d'un ouvert convexe $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$, dont la différentielle est nulle en tout point de $\Omega$. Alors $f$ est constante sur $\Omega$.*

En fait, il suffit de supposer l'ouvert $\Omega$ *connexe* pour ce dernier corollaire : un point $a$ étant choisi dans un ouvert connexe de $\mathbb{R}^m$, tout point $b$ de l'ouvert peut être joint à $a$ par une ligne polygonale incluse dans $\Omega$. L'inégalité des accroissements finis (appliquée avec $M = 0$) montre que $f$ prend la même valeur en deux sommets consécutifs de la ligne, ce qui entraîne $f(a) = f(b)$.

Dans le cas des applications *à valeurs numériques*, on peut écrire une égalité des accroissements finis :

**Théorème 2.18.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f$ une application de $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a$ un point de $\Omega$ et $h \in \mathbb{R}^m$ tel que le segment $[a, a+h]$ soit inclus dans $\Omega$. On suppose que l'application $f$ est continue en tout point de $[a, a+h]$ et différentiable en tout point de $]a, a+h[$. Il existe alors $\theta \in ]0,1[$ tel que*

$$f(a+h) - f(a) = Df(a+\theta h) \cdot h.$$

La preuve résulte de l'application de l'égalité classique des accroissements finis à la fonction à valeurs réelles $\varphi$ définie sur $[0,1]$ par $\varphi : t \mapsto f(a+th)$.

## 3. Différentielles d'ordre supérieur

### 3.1. Notion d'application $n$ fois différentiable

#### 3.1.1. Applications deux fois différentiable

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f$ une application *différentiable* de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$ et on considère l'application $Df$ définie sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F)$ (qui est un espace vectoriel normé de dimension finie). Si $Df$ est différentiable sur $\Omega$ on dit que $f$ est *deux fois différentiable* sur $\Omega$. L'application $D(Df)$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F))$ est appelée *différentielle seconde* (ou bien : *d'ordre 2*) de $f$. On la notera $D^2 f$.

On remarque qu'il existe une *isométrie canonique* (un isomorphisme algébrique, conservant la norme) entre l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F))$ et l'espace $L_2(\mathbb{R}^m, F)$ des applications bilinéaires définie sur $\mathbb{R}^m$ et à valeurs dans $F$.
Elle fait correspondre à $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F))$ la forme bilinéaire $\Phi \in L_2(\mathbb{R}^m, F)$ définie par

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^m)^2, \;\; \Phi(x,y) = \varphi \cdot x \cdot y,$$

où $\varphi \cdot x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F)$ désigne l'image par $\varphi$ de $x \in \mathbb{R}^m$ et $\varphi \cdot x \cdot y \in F$, l'image par $\varphi \cdot x$ de $y$.

### 3.1.2. Applications $n$ fois différentiable

On définit la notion d'application $n$ fois différentiable par récurrence.

Pour un espace vectoriel normé $F$, on définit d'abord par récurrence la suite d'espace vectoriels normés $(L^n(\mathbb{R}^m, F))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$L^1(\mathbb{R}^m, F) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F) \ ; \ \text{pour } n \geq 2 \ \ L^n(\mathbb{R}^m, F) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, L^{n-1}(\mathbb{R}^m, F)).$$

**Exemple** : on a $L^2(\mathbb{R}^m, F) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F))$.

Comme pour le cas $n = 2$, on dispose d'une *isométrie canonique* entre l'espace vectoriel normé $L^n(\mathbb{R}^m, F))$ et l'espace $L_n(\mathbb{R}^m, F)$ des applications $n$-linéaires définies sur $\mathbb{R}^m$ et à valeurs dans $F$. A $\varphi$ élément de $L^n(\mathbb{R}^m, F)$ elle fait correspondre $\Phi \in L_n(\mathbb{R}^m, F)$ définie par

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^m)^n, \ \ \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

avec une convention d'écriture généralisant celle ci-dessus.

On pose alors :

**Définition 3.1.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f$ une application de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$. L'application $f$ est $n$* fois différentiable *sur l'ouvert $\Omega$ si les deux conditions suivantes sont remplies :*
*(3.1-1) l'application $f$ est $n-1$ différentiable sur l'ouvert $\Omega$ ;*
*(3.1-2) l'application $D^{n-1}f$ (définie sur $\Omega$ à valeurs dans $L^{n-1}(\mathbb{R}^m, F)$) est différentiable sur l'ouvert $\Omega$.*
*On note alors $D^n f = D(D^{n-1}f\ )$ et cette application est appelée* différentielle d'ordre $n$ *de $f$.*

**Définition 3.2.** *Avec les notations de la définition 3.1, on dit que l'application $f$ est* de classe $\mathrm{C}^n$ *sur l'ouvert $\Omega$ si les deux conditions (3.1-1) et (3.1-2) sont vérifiées et si de plus $D^{n-1}f$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega$.*

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f$ une application de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$. Les propriétés suivantes découlent des définitions :

**Proposition 3.3.**
*(1) Si $f$ est $n$ différentiable sur $\Omega$ alors pour tout entier $k$ vérifiant $0 \leq k \leq n-1$, $f$ est de classe $\mathrm{C}^k$ sur $\Omega$ et l'application $D^k f$ est $n-k$ fois différentiable sur $\Omega$.*
*(2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $f$ est $n$ fois différentiable sur $\Omega$ alors $f$ est de classe $\mathrm{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On pose enfin :

**Définition 3.4.** *On dit que $f$ est de classe $\mathrm{C}^\infty$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f$ est $n$ fois différentiable sur $\Omega$.*

**Exemple**.- Soit $F$ un espace normé. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F)$ est de classe $\mathrm{C}^\infty$. Elle est en effet différentiable en tout point de $\mathbb{R}^m$, de différentielle elle même. L'application $Du : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, F)$ est donc constante, différentiable et de différentielle nulle. On en déduit que les différentielles d'ordre supérieur ou égal à deux de $u$ sont nulles.

### 3.2. Propriétés algébriques des applications $n$ fois différentiables

Les propriétés suivantes se démontrent par récurrence :

**Théorème 3.5.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $n$ un entier positif. L'ensemble des applications de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$ $n$ fois différentiables (resp.* de classe $\mathrm{C}^n$*) sur $\Omega$ est un espace vectoriel réel.*

**Théorème 3.6.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $n$ un entier positif. Une application $f$ de $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est $n$ fois différentiable sur $\Omega$ (resp.* de classe $\mathrm{C}^n$*) si et seulement si chacune des applications composantes de $f$ est $n$ fois différentiable (resp.* de classe $\mathrm{C}^n$*).*

**Théorème 3.7.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $\Omega'$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f$ une application définie de $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega'$, $g$ une application définie de $\Omega'$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$ et $n$ un entier positif. Si l'application $f$ est $n$ fois différentiable sur $\Omega$ (resp.* de classe $\mathrm{C}^n$*) et si $g$ est $n$ fois différentiable sur $\Omega'$ (resp.* de classe $\mathrm{C}^n$*), l'application $g \circ f$, définie sur $\Omega$, est $n$ fois différentiable sur $\Omega$ (resp.* de classe $\mathrm{C}^n$*)*

On remarque que le théorème 3.7 entraîne le théorème 3.6. En effet on dispose des deux relations :

$$Df = \textstyle\sum_{j=1}^{p} N_j \circ Df_j \quad \forall j \in \mathbb{N}_p, \ \ Df_j = P_j \circ Df, \tag{3.1}$$

où $N_j$ est la $j^{ième}$ injection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ et $P_j$ la $j^{ième}$ projection canonique de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}$.
Les applications $N_j$ et $P_j$ sont linéaires et continues (on est en dimension finie) et donc de classe $\mathrm{C}^\infty$ : le théorème 3.6 découle alors immédiatement des relations (3.1).

### 3.3. Propriétés de symétrie des différentielles d'ordre supérieur

Ces propriétés sont fondamentales et de démonstration relativement délicate. On énonce un premier résultat, concernant la différentielle seconde.

**Théorème 3.8.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f$ une application définie de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$ deux fois différentiable sur $\Omega$. On a alors, en tout point $a$ de $\Omega$,*

$$\forall (h,k) \in (\mathbb{R}^m)^2, \quad D^2 f(a) \cdot h \cdot k = D^2 f(a) \cdot k \cdot h.$$

La démonstration du théorème 3.8 utilise de manière assez fine la définition de la différentielle seconde. Il se généralise à un ordre de différentiation $n$ quelconque par récurrence sur $n$.

**Théorème 3.9.** *Soit $n > 0$ un entier, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f$ une application définie de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$, $n$ fois différentiable sur $\Omega$. Pour toute permutation $\sigma$ de $\mathbb{N}_n$ et pour tout point $a$ de $\Omega$, on a*

$$\forall (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in (\mathbb{R}^m)^n, \;\; D^n f(a) \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n = D^n f(a) \cdot h_{\sigma(1)} \cdot h_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot h_{\sigma(n)}.$$

### 3.4. Dérivées partielles d'ordre supérieur et théorème de Schwarz

#### 3.4.1. Notion de dérivées partielles d'ordre supérieur à 1

On considère dans tout ce paragraphe une application $f$ définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$.

On suppose que l'appplication $f$ possède sur $\Omega$ une dérivée partielle par rapport à la $i^{ième}$ variable $(0 \leq i \leq m)$ notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$). Si cette application possède une dérivée partielle par rapport la $j^{ième}$ variable $(0 \leq j \leq m)$, on dira que $f$ possède une *dérivée partielle seconde.* On utilisera l'une ou l'autre des notations, pour tout $a \in \Omega$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = f''_{x_j x_i}(a).$$

Dans le cas particulier ou l'on dérive partiellement deux fois par rapport à la même variable, on notera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a).$$

On laisse au lecteur le soin de définir plus généralement la notion de dérivée partielle d'ordre $n$, pour $n \geq 3$.

Avec ces notions, on montre le résultat suivant, généralisation du théorème 2.13 :

**Théorème 3.10.** *Soit $n > 0$ un entier, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f$ une application définie de $\Omega$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*
*(1) l'application $f$ est de classe $\mathrm{C}^n$ sur $\Omega$.*
*(2) l'application $f$ admet des dérivées partielles (par rapport à chaque variable) d'ordre $n$ continues sur $\Omega$.*

#### 3.4.2. Le théorème de Schwarz

On énonce d'abord le théorème pour des applications deux fois différentiables :

**Théorème 3.11.** *Soit $f$ une application d'un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$. Si $f$ est deux fois différentiable sur l'ouvert $\Omega$, on a*

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}_p)^2, \; \forall a \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a). \tag{3.2}$$

*En particulier lorsque $f$ possède des dérivées partielles secondes continues la relation (3.2) est vraie.*

La preuve de la première assertion repose essentiellement sur la propriété de symétrie des différentielles d'ordre deux énoncée au théorème 3.8. La deuxième assertion vient du théorème 3.10 : si $f$ possède des dérivées partielles continues $f$ est en particulier deux fois différentiable.

Voici le théorème général qui demande un peu de soin dans son énoncé :

**Théorème 3.12.** *Soit $f$ une application d'un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$ et $n \geq 3$ un entier . Si $f$ est $n$ différentiable sur l'ouvert $\Omega$, on a pour toute application $\rho$ de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$ et pour toute permutation $\sigma$ de $\mathbb{N}_n$*

$$\forall a \in \Omega, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_{\rho(1)} \partial x_{\rho(2)} \cdots \partial x_{\rho(n)}}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{\rho\circ\sigma(1)} \partial x_{\rho\circ\sigma(2)} \cdots \partial x_{\rho\circ\sigma(n)}}(a). \tag{3.3}$$

### 3.4.3. Notion de matrice hessienne

On se place dans cette sous-section dans le cas particulier d'une application $f$ définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ et à valeurs réelles. Nous supposerons $f$ deux fois différentiable. On définit alors la matrice *hessienne* de $f$ en un point $a \in \Omega$ (notée $\text{Hess}\, f(a)$) par

$$\text{Hess}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Comme $f$ est supposée deux fois différentiable cette matrice est *symétrique.* On retiendra que cela est en particulier vrai lorsque $f$ est de classe $\mathrm{C}^2$ (au moins), ce qui se "contrôle" sur l'expression des dérivées partielles seconde.

On montre facilement que la matrice hessienne est la matrice de la forme bilinéaire associée à $D^2 f$ par l'isomorphisme canonique entre les espaces $L(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p))$ et $L_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ décrit plus haut. On en déduit

$$\forall a \in \Omega, \ \ \forall (h,k) \in (\mathbb{R}^m)^2, \quad D^2 f(a) \cdot h \cdot k = (h_1, h_2, ..., h_m)\, \text{Hess}\, f(a) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix},$$

où l'on a posé $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ et $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

# 4. Formules de Taylor

## 4.1. Position du problème et notations

### 4.1.1. Position du problème

Il s'agit d'étendre aux applications définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^m$ les différentes formules de Taylor connues pour les fonctions de la variables réelles. Dans ce qui suit, sauf exception mentionnée, les applications rencontrées seront à valeurs dans un espace normé $F$.

### 4.1.2. Puissance symbolique d'une différentielle

On considère une application $f$ définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans un espace normé $F$. On se donne encore un point $a$ de $\Omega$ et un entier $n$ strictement positif.
On supposera que $f$ est $n$ fois différentiable au point $a$, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert $W$ de $a$, inclus dans $\Omega$ sur lequel $f$ est $n-1$ fois différentiable et que l'application $D^{n-1} f$ définie sur $W$ à valeurs dans $L^{n-1}(\mathbb{R}^m, F)$ est différentiable au point $a$.
On pose alors :

**Définition 4.1.** *On appelle* puissance symbolique d'ordre $n$ *de la différentielle de* $f$ *au point* $a$ *l'application, définie sur* $\mathbb{R}^m$ *et à valeurs dans* $F$*, par*

$$h \longmapsto D^n f(a) \cdot h^n = D^n f(a) \cdot h \cdot h \cdot \ldots \cdot h \ \ (h \text{ répété } n \text{ fois}).$$

On démontre que l'on a

$$\forall h \in \mathbb{R}^m, \ \ D^n f(a) \cdot h^n = \sum_{\rho} h_{\rho(1)} h_{\rho(2)} \ldots h_{\rho(n)} \frac{\partial^n f}{\partial x_{\rho(1)} \partial x_{\rho(2)} \cdots \partial x_{\rho(n)}}(a),$$

où la somme est étendue à tous les éléments $\rho$ de $F(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_m)$ et ou l'on a écrit $h = (h_1, h_2, \cdots, h_p)$.

Le théorème de Schwarz permet des regroupements dans la somme précédente. On obtient, pour tout $h \in \mathbb{R}^m$,

$$D^n f(a) \cdot h^n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_m!} (h_1)^{\alpha_1} (h_2)^{\alpha_2} \ldots (h_m)^{\alpha_p} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}(a).$$

Il existe une *règle mnémotechnique* pour retenir ce résultat. On écrit symboliquement :

$$D^n f(a) \cdot h^n = [Df(a) \cdot h]^{[n]} = \left[ h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \ldots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right]^{[n]},$$

et on développe comme s'il s'agissait d'une puissance $n^{ième}$. On remplace ensuite dans chaque produit

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right)^{\alpha_2} \ldots \left( \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)^{\alpha_m} \ \text{ par } \ \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}(a).$$

#### 4.1.3. Notations et énoncé du problème

Dans la suite on considère une application $f$ définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans un espace normé $F$. On se donne encore un point $a$ de $\Omega$ et un entier $n$ strictement positif.
On supposera que $f$ est $n$ fois différentiable au point $a$, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert $W$ de $a$, inclus dans $\Omega$ sur lequel $f$ est $n-1$ fois différentiable et que l'application $D^{n-1}f$ définie sur $W$ à valeurs dans $L^{n-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ est différentiable au point $a$.

Pour tout $h$, vecteur de norme assez petite pour que $a+h$ appartiennent à $E$, le vecteur

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot h^k \tag{4.1}$$

est défini.

La fonction $h \mapsto r(h)$ ainsi définie sur un voisinage du point $a$ s'appelle le *reste d'ordre* $n$ (au point $a$) et on traite de deux questions.
(1) Donner une propriété asymptotique *locale* de la fonction $h \mapsto r(h)$, lorsque le vecteur $h$ tendant vers 0. C'est le théorème de Taylor-Young.
(2) Donner une majoration de $r(h)$ sur un voisinage du point $a$, ou mieux, sous des hypothèses plus forte une expression de $r(h)$. Il s'agit des différentes formules de Taylor-Lagrange.

### 4.2. Théorème de Taylor-Young

**Théorème 4.2.** *Soit $n$ un entier positif, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $F$ un espace vectoriel normé, $a$ un point de $\Omega$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $F$. Si $f$ est $n$ fois différentiable au point $a$, le reste d'ordre $n$ au point $a$, $r(h)$ vérifie*

$$r(h) = \circ\left(\|h\|^n\right).$$

La preuve de ce théorème se fait par récurrence sur l'entier $n$ et se trouve être sensiblement distincte de celle du théorème analogue, pour le cas des fonctions de la variable réelle.

### 4.3. Inégalité de Taylor-Lagrange

**Théorème 4.3.** *Soit $n$ un entier positif, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $F$ un espace vectoriel normé et $f$ une application de classe $\mathrm{C}^n$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $F$. Soit de plus un segment $[a, a+h]$ inclus dans $\Omega$ et $M$ un réel positif. Si $f$ admet une dérivée $(n+1)^{ième}$ bornée par $M$ sur $]a, a+h[$, on a*

$$\|r(h)\| \leq M \|h\|^{n+1} / (n+1)!.$$

Ici, la preuve de ce résultat résulte de l'application de l'inégalité de Taylor-Lagrange, dans le cas d'une fonction de la variable réelle, à la fonction composée $\varphi\ t \mapsto f(a+th)$.

**Remarque**.- Dans le cas particulier ou l'application $f$ est à *valeurs numérique*, on écrit le *reste de Lagrange*. Plus précisement :

**Théorème 4.4.** *Soit $n$ un entier positif, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f$ une application de classe $\mathrm{C}^n$ définie sur $\Omega$ à valeurs réelles et un segment $[a, a+h]$ inclus dans $\Omega$. Si $f$ admet une dérivée $(n+1)^{ième}$ sur $]a, a+h[$, il existe un réel $\theta \in ]0, [$ tel que*

$$r(h) = D^{n+1} f(a+\theta h) \cdot h^{n+1}.$$

### 4.4. Formule de Taylor avec reste intégral

**Théorème 4.5.** *Soit $n$ un entier positif ou nul, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $F$ un espace vectoriel normé et $f$ une application de classe $\mathrm{C}^{n+1}$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $F$ et $[a, a+h]$ inclus dans $\Omega$. On a*

$$r(h) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) \cdot h^{n+1} \mathrm{d}u.$$

Là encore, ce résultat résulte de l'application du théorème analogue établit dans le cas d'une fonction de la variable réelle, à la fonction composée $\varphi\ t \mapsto f(a+th)$.

**4.5. Application : recherche d'extrema d'une fonction numérique de plusieurs variables**

On considère dans cette section, une application $f$ définie sur un ouvert de $\Omega$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs réelles. On rappelle les définitions d'extremum et d'extremum strict :

**Définition 4.6.** (1) *Un point* $a$ *de* $\Omega$ *est un* minimum local *(resp.* maximum local*) de* $f$ *s'il existe un voisinage* $W$ *de* $a$ *(inclus dans* $\Omega$*) tel que*

$$\forall x \in W, \quad f(x) \geq f(a) \quad (\textit{resp.} \quad f(x) \leq f(a)).$$

(2) *Un point* $a$ *de* $\Omega$ *est un* minimum local strict *(resp.* maximum local strict*) de* $f$ *s'il existe un voisinage* $W$ *de* $a$ *(inclus dans* $\Omega$*) tel que*

$$\forall x \in W \backslash \{a\}, \quad f(x) > f(a) \quad (\textit{resp.} \quad f(x) < f(a)).$$

(3) *Un point* $a$ *de* $\Omega$ *est appelé* extremum local *(resp.* extremum local strict*) de* $f$ *si* $a$ *de* $\Omega$ *est un minimum ou un maximum (resp. minimum strict ou un maximum strict) de* $f$*.*

On démontre à l'aide de la formule de Taylor-Young des conditions nécessaires pour qu'un point $a$ de $\Omega$ soit un extremum :

**Proposition 4.7.** -Condition nécessaire du premier ordre.
*Si l'application* $f$ *est différentiable au point* $a$ *et si* $f$ *admet un extremum en* $a$ *alors* $Df(a)$ *est nulle.*

**Proposition 4.8.** -Condition nécessaire du deuxième ordre.
*Si l'application* $f$ *est deux fois différentiable au point* $a$ *et si* $f$ *admet un minimum (resp. maximum) en* $a$ *alors*
*(4.8-1)* $Df(a)$ *est nulle ;*
*(4.8-2)* $D^2f(a)$ *est une forme bilinéaire (symétrique) positive (resp. négative).*

Dans la condition (4.8-2) on considère (ce qui est légitime) $D^2f(a)$ comme une forme bilinéaire. On rappelle que dire qu'elle est *positive*, c'est dire que la forme quadratique associée à $D^2f(a)$ est positive, soit que

$$\forall h \in \mathbb{R}^m, \quad D^2f(a)(h,h) \geq 0.$$

Bien sûr, $D^2f(a)$ est négative si $-D^2f(a)$ est positive.

**Remarque.-** La proposition 4.7 s'applique en particulier lorsque $f$ est de classe $\mathrm{C}^1$et la proposition 4.8 lorsque $f$ est de classe $\mathrm{C}^2$.

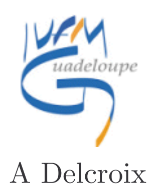
On donne maintenant une condition suffisante :

**Proposition 4.9.** *On suppose l'application* $f$ *deux fois différentiable en* $a$ *un point de* $\Omega$ *et que* $Df(a)$ *est nulle.*
(1) *Si* $D^2f(a)$ *est une forme définie positive (resp. négative) alors* $f$ *possède un minimum (resp. maximum) local strict en* $a$*.*
(2) *Si* $D^2f(a)$ *est une forme non dégénérée, et non définie alors* $f$ *n'admet pas d'extremum relatif au point* $a$*.*

La proposition 4.9 repose sur les propriétés des formes quadratiques non dégénérées, positives ou négatives.

**Remarque**.- Rappelons que la matrice de $D^2f(a)$ est la *matrice hessienne* de $f$ au point $a$ et que $D^2f(a)$ est définie positive si et seulement si elle est de signature $(m,0)$. Rappelons quelques critères pour étudier la positivité de $D^2f(a)$ (ou de $\mathrm{Hess}_f(a)$ par abus de langage) :
(1) la matrice $\mathrm{Hess}_f(a)$ est définie positive si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont strictement positives ;
(2) la matrice $\mathrm{Hess}_f(a)$ est définie positive si, et seulement si, ses mineurs principaux sont strictement positifs ;
(3) la matrice $\mathrm{Hess}_f(a)$ est définie négative si, et seulement si la matrice $-\mathrm{Hess}_f(a)$ est définie positive.

Enfin, dire que $D^2f(a)$ est non dégénérée c'est dire que $\det(\mathrm{Hess}_f(a)) \neq 0$. Si elle est non définie c'est que sa signature est du type $(p,q)$ avec $p+q=m$ et $pq \neq 0$.




A Delcroix

# CALCUL DE PRIMITIVES
**Principales méthodes et techniques de calcul**

Ce document ne constitue pas un cours sur l'intégrale de Riemann. On se borne à en rappeler les principales propriétés et à décrire les principales méthodes de calcul effectif de primitives, qu'on illustre par de nombreux exemples. On renvoie le lecteur intéressé aux documents :

- *Construction de l'intégrale de Riemann-propriétés essentielles* (site *megamaths* : http://perso.wanadoo.fr/megamaths/ad/adaccueil.html)
- *Intégrale de Riemann* (http://plates-formes.iufm.fr/guadeloupe/moodle/),

pour une présentation de l'intégrale de Riemann.

Le calcul des primitives, jadis sujet par excellence pour des exercices ‹‹ taupinards›› devrait perdre ce rôle, puisque des systèmes de calcul formel sont de plus en plus intégrés aux petites calculatrices (tous les exemples de ce document ont été vérifiés grâce à Maple©). On insistera donc davantage sur les méthodes qu'il reste nécessaire de connaître et sur le contrôle de validité des résultats, qu'ils soient obtenus à la main ou à la machine. (En particulier, cette dernière ne donne pas les domaines de validité des calculs effectués.)

## 1. NOTION D'INTEGRALE DEFINIE d'une fonction continue

### 1.1. Introduction : approche heuristique de l'intégrale de Riemann

Soit $a$ et $b$ deux réels fixés, avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$. Un des buts de l'intégrale de Riemann est de définir et de calculer l'aire de la partie $P$ comprise entre l'axe des $x$ et le graphe de $f$ :

$$P = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ x \in [a, b] \,, \ 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

Pour ce faire, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq n$, $n$ entier, $x_0 = a$, $x_n = b$) et on remplace $f$ sur $[x_i, x_{i+1}]$ par une constante $h_i$. Cette constante peut être une valeur prise par $f$ sur cet intervalle (somme de Riemann) ou bien un max ou un min de $f$ sur cet intervalle (somme de Darboux). On note que ceci suppose $f$ bornée, une des limitations de l'intégrale de Riemann. On somme ensuite les aires des rectangles de longueur $x_{i+1} - x_i$ et de hauteur $h_i$. Une fonction sera dite intégrale au sens de Riemann si les sommes obtenues, soit $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, h_i$, tendent vers une limite $I$ (indépendante du choix des $x_i$ et des $h_i$) lorsque le *pas* $(x_{i+1} - x_i)$ tend vers 0, dans un sens à préciser.
C'est la formalisation de cette démarche qui constitue le la théorie de l'intégrale de Riemann.

### 1.2. Intégrale de Riemann des fonctions continues

Dans la suite de ce paragraphe $a$ et $b$ désignent deux réels fixés, avec $a < b$.

**Définitions 1.**
*i. On appelle* subdivision *de l'intervalle* $[a, b]$ *toute suite finie* $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ $(n \geq 1)$ *de points de* $[a, b]$ *vérifiant*

$$a = x_0, \qquad x_n = b. \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\,, \quad x_{i-1} < x_i.$$

*ii. On appelle* pas *d'une subdivision* $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *le nombre* $\delta(\sigma)$, *égal à*

$$\delta(\sigma) := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

**Exemple 1.** *Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1 et*

$$\forall i \in \{0, ...., n\}, \quad x_i := a + i\frac{b-a}{n}.$$

*La subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ s'appelle la subdvision régulière de $[a, b]$ de pas $(b-a)/n$.*

**Définition 2.** *Soit $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$, une subdvision de $[a, b]$ et $\tau = (t_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de points de $[a, b]$. telle que*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i \leq t_{i+1} \leq x_{i+1}. \tag{1.1}$$

*La somme*

$$R(f, \sigma, \tau) := \textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(t_i)$$

*est la* somme de Riemann *relative à la fonction $f$ à $(\sigma, \tau)$.*

**Exemples 2.** *i. Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ constante, avec $f(x) = c$, pour tout $x \in [a, b]$. Pour toute subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$, et suite $\tau = (t_i)_{1\leq i\leq n}$ vérifiant 1.1 on a*

$$R(f, \sigma, \tau) = \textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(t_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c = (b-a)c.$$

*ii. Soit $g \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ définie par avec $f(x) = x$, pour tout $x \in [0, 1]$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_n = (x_{n,i})_{0\leq i\leq n}$ la subdivision de pas régulier $1/n$. Choisissons $\tau = (t_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $t_{n,i} = i/n = x_{n,i}$. On a*

$$R(g, \sigma_n, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_{n,i} - x_{n,i-1})g(t_{n,i}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

**Théorème 1.1.** *Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ continue. Il existe un réel $l$ tel que : pour toute suite de subdivisions $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lim_{n\to+\infty} \delta(\sigma_n) = 0$, on a*

$$l = \lim_{n\to+\infty} R(f, \sigma_n, \tau_n),$$

*quelque soit le choix de points $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectant, pour chaque $n$, la condition 1.1.*

On note ce réel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

qu'on lit ‹‹ somme de $a$ à $b$ de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ›› ou bien ‹‹ intégrale de $a$ à $b$ de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ››. On appelle parfois ce symbole une intégrale définie, pour indiquer que les bornes sont données, à l'inverse du cas des primitives, dans la section 2.

**Exemple 3.** *On reprend l'exemple 2-i. On a, pour toute subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$, et suite $\tau = (t_i)_{1\leq i\leq n}$ vérifiant 1.1,*

$$R(f, \sigma, \tau) = \textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(t_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c = (b-a)c.$$

*D'où l'existence de $l$ et sa valeur*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)c.$$

**Remarques 1.**
*i. Le théorème 1.1, admis ici, ne donne pas de moyen de calculer le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Dans certains cas, on peut calculer la valeur exacte de ce nombre grâce à la notion de primitive (voir section 2). Le calcul des primitives est le point important de ce document.*
*ii. Cependant, ce calcul peut être fastidieux ou impossible. On recours alors à des méthodes numériques de calcul pour approcher ce réel. C'est un important chapitre des cours d'analyse numérique.*
*iii. Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire algébrique du sous ensemble du plan compris entre l'axe horizontal et le graphe de $f$. Nous admettons ce résultat ici.*

### 1.3. Propriétés de l'intégrale

#### 1.3.1. Propriétés algébriques

**Théorème 1.2.** Relation de Chasles.- *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *avec* $a < c < b$ *et* $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ *continue. On a alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

La fonction $f$ étant continue sur $[a, b]$ est continue sur $[a, c]$ et $[c, b]$ ce qui donne un sens à l'inégalité 1.2.

**Théorème 1.3.** *Pour tout* $(f, g) \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})^2$ *continues et tout* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

Autrement dit, l'application $I$ définie sur $\mathrm{C}([a, b], \mathbb{R})$ ensemble des applications continues définies sur $[a, b]$ par $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une application linéaire.

#### 1.3.2. Inégalités classiques

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$.

**Proposition 1.4.** *Soit* $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ *continue sur l'intervalle* $[a, b]$. *On suppose que :* $\forall x \in [a, b],\ f(x) \geq 0$. *Alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

**Preuve**.- Soit $f$ comme dans l'énoncé. Pour toute subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ et tout choix $\tau = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ satisfaisant la condition 1.1 on a

$$S(f, \sigma, \tau) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \geq 0.$$

L'inégalité large persiste par passage à la limite lorsque le pas de $\sigma$ tend vers 0.□

**Corollaire 1.5.** *Soit* $(\varphi, \psi) \in (\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}))^2$ *continues sur l'intervalle* $[a, b]$. *On suppose que :* $\forall x \in [a, b],\ \varphi(x) \leq \psi(x)$. *Alors*

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Preuve**.- L'application $f = \psi - \varphi$ est continue, positive sur $[a, b]$. On a donc

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

cette dernière inégalité par linéarité de l'intégrale.
Il vient donc : $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x$.□

**Remarque 2.** *Soit* $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ *continue sur l'intervalle* $[a, b]$ *positive et* non nulle en un point de $[a, b]$. *On peut démontrer (cf. TD) que :* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

On tire de la remarque 2, par contraposée, la proposition suivante.

**Proposition 1.6.** *Soit* $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ *continue sur l'intervalle* $[a, b]$ *positive telle que* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. *Alors* $f$ *est nulle sur* $[a, b]$.

**Proposition 1.7.** *Soit* $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ *continue sur l'intervalle* $[a,b]$. *On a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

**Preuve.**- On rappelle que si $f$ est continue, la fonction $|f|$ est continue, ce qui donne un sens à l'inégalité 1.4. Pour toute subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ et tout choix $\tau = (t_i)_{1\leq i\leq n}$ satisfaisant la condition 1.1, on a

$$S(|f|,\sigma,\tau) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\,|f(t_i)| \geq \left|\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(t_i)\right| = |S(f,\sigma,\tau)|\,.$$

L'inégalité large persiste par passage à la limite.□

### 1.3.3. Formules de la moyenne

**Proposition 1.8.** Inégalité de la moyenne.- *Soit* $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ *continue sur l'intervalle* $[a,b]$ *et* $m$ *et* $M$ *tels que* $\forall x \in [a,b],\ m \leq f(x) \leq M$. *Alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a). \tag{1.5}$$

**Preuve.**- On applique le corollaire 1.4 deux fois : d'une part à la fonction constante égale à $m$ et à $f$ ; d'autre part à $f$ et à la fonction constante égale à $M$.□

**Corollaire 1.9.** *Soit* $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ *continue sur l'intervalle* $[a,b]$. *On a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq (b-a)\sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)|\,.$$

**Preuve.**- On propose deux preuves.
*i*. On prend $M = \sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)|$ et $m = -\sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)|$ dans l'inégalité 1.5.
*ii*. Comme $|f(x)| \leq \sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)|$, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)|\,\mathrm{d}x \leq (b-a)\sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)|\,,$$

la première inégalité par la proposition 1.7 et la deuxième par le corollaire 1.5.□

**Théorème 1.10.** Forme simple du premier théorème de la moyenne.- *Soit* $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ *continue sur l'intervalle* $[a,b]$ *alors il existe* $c \in ]a,b[$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

**Preuve.**- En effet, $f$ étant continue, on a $f([a,b]) = [m,M]$ avec $m = \inf_{\xi\in[a,b]} f(\xi)$ et $M = \sup_{\xi\in[a,b]} f(\xi)$. L'inégalité de la moyenne entraine

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\square$$

### 1.4. Extension de la notion d'intégrale

Dans ce qui précéde, on considérait deux réels $a$ et $b$ tels que $a < b$. On propose ici les extensions suivantes :
*i.* Si $f$ est une fonction (à valeurs réelles) définie en un réel $a$ on pose $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
*ii.* Si $a$ et $b$ sont deux réels avec $a > b$ et $f$ définie et continue sur un intervalle $I$ contenant $a$ et $b$, on pose

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On peut étendre, de manière cohérente, les résultats précédents portant sur les propriétés algébriques. Soit $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
*i.* Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ continue et $(a,b,c) \in I^3$ on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

*ii.* Pour tout $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$ continues, tout $(a,b) \in I^2$, tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\ \mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En revanche, il faut faire attention aux résultats portant sur les inégalités. Par exemple, soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ continue, $(a,b) \in I^2$ on a alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x\right| \qquad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

## 2. NOTION DE PRIMITIVE

### 2.1. Primitive sur un intervalle

Soit $I$ un intervalle ouvert non trivial.

**Définition 3.** *Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que $F \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est une primitive de $f$ si $F$ est dérivable et si $F' = f$.*

**Exemple 4.** *La fonction $p_n : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$ définie et continue $\mathbb{R}$ sur possède la fonction $P_n : x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ comme primitive. (On le vérifie en dérivant la fonction $P_n$.)*

**Proposition 2.1.** *Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ admettant une primitive $F \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Soit $G \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
*i. la fonction $G$ est une primitive de $f$ ;*
*ii. Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $G = F + C$.*

**Preuve.**
[*i.* $\Rightarrow$ *ii.*] Posons $H = G - F$. Comme $G$ est une primitive de $F$, on a $G' = F' = f$ et $H' = G' - F' = 0$. Ainsi $H$, de dérivée nulle est une fonction constante. Il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I, \quad H(x) = C = G(x) - F(x).$$

[*ii.* $\Rightarrow$ *i.*] De $G = F + C$, on tire

$$\forall x \in I, \quad G'(x) = F'(x) = f(x).$$

Ainsi la fonction $G$ est bien une primitive de $f$. □

Une fonction qui admet une primitive en admet donc une infinité et deux primitives de $f$ différent d'une constante. On notera, pour $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ admettant $F$ comme primitive

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

pour indiquer que toutes les primitives de $f$ s'écrivent comme la somme de $F$ est d'une constante.

**Exemple 5.** *Soit $n$ un entier naturel on a*

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Voici les deux résultats fondamentaux de ce chapitre.

**Théorème 2.2.** *Toute fonction continue admet une primitive.*

Ce résultat est un théorème d'existence. Il ne donne pas de moyen de calcul des primitives d'une fonction continue donnée.

**Théorème 2.3.** *Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue sur $[a, b]$ et $F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une primitive de $f$. On a*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

On notera souvent

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b \,,$$

signifiant ainsi que $F$ est une primitive de $f$.

On peut préciser ces résultats de la manière suivante :

**Proposition 2.4.** *Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue et $a \in I$. Alors l'application $F$ définie sur $I$ par*

$$F : y \mapsto \int_a^y f(x) \,\mathrm{d}x$$

*est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $I$. C'est de plus la seule primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

L'écriture précédente possède bien un sens, puisque $f$ est continue sur $I$ donc sur l'intervalle d'extrémités $a$ et $y$ et le symbole ‹‹ $\int_a^y f(x) \,\mathrm{d}x$ ›› est alors bien défini.

**Exemple 6.** *Reprenons l'exemple 2-ii. Comme $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, on a*

$$\int_0^1 g(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{2}.$$

*Ce résultat à rapprocher du calcul de sommes de Riemann. On a*

$$\lim_{n \to +\infty} R(g, \sigma_n, \tau_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

### 2.2. Application des propriétés de l'intégrale au calcul d'intégrales et de primitives

#### 2.2.1. Remarques initiales

Dans la suite, on considérera une fonction $f$ définie et continue en général sur un intervalle $I$, ou bien sur une réunion finie ou infinie d'intervalles.
Par exemple, considérons $f$ définie et continue sur deux intervalles $I$ et $J$ non triviaux avec $I \cap J = \varnothing$. Alors $f$ admet une primitive $F_I$ (*resp.* $F_J$) sur $I$ (*resp.* $J$). On peut écrire

$$i.\ \text{sur } I : \int f(x) \,\mathrm{d}x = F_I(x) + C \qquad ii.\ \text{sur } J : \int f(x) \,\mathrm{d}x = F_J(x) + C'.$$

La description complète des primitives impose de prendre des constantes $C$ et $C'$ différentes.

**Exemple 7.** *La fonction* $x \mapsto 1/x$ *est définie et continue sur* $]-\infty, 0[$ *et* $]0, +\infty[$. *On a*

$$i.\ \text{sur } ]0,+\infty[\ :\ \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C \quad ii.\ \text{sur } ]-\infty,0[\ :\ \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + C'$$

*(En effet la fonction* $F : x \mapsto \ln(-x)$ *est définie et dérivable sur* $]-\infty, 0[$ *de dérivée* $\varphi'(x) = -1/(-x) = 1/x$.*)*
*On rassemble souvent ces deux résultats en écrivant que*

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

*Mais la description de l'ensemble des primitives de la fonction* $x \mapsto 1/x$ *impose de prendre des constantes éventuellement différentes sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$.

**Exemple 8.** *La fonction* $x \mapsto \tan x$ *est définie et continue sur chacun des intervalles* $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ *où* $k$ *décrit l'ensemble* $\mathbb{Z}$. *Elle admet des primitives sur chacun de ces intervalles, que l'on calculera au paragraphe 3.1.*

### 2.2.2. Tableau de primitives usuelles

Ce tableau s'obtient par lecture inverse d'un tableau des dérivées usuelles. On note $D$ l'ensemble de définition des primitives cherchées.

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$, pour $\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$. Le domaine $D$ dépend de la valeur de $\alpha$.
   En particulier
   $\displaystyle\int \mathrm{d}x = x + C\ \ (D = \mathbb{R})$ ; $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C\ \ (D = \mathbb{R}_+^*)$ ; $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C\ \ (D = \mathbb{R}^*)$.

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad (D = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[)\,.$

3. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C\ \ (D = \mathbb{R})$ ; $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C,\ a > 0$ et $a \neq 1,\ (D = \mathbb{R})$.

4. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C\ \ (D = \mathbb{R})$ ; $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C\ \ (D = \mathbb{R})$.

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \tan^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \tan x + C \quad \left(D = \cup_{k\in\mathbb{Z}} ]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[\right),$
   $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \operatorname{cotan}^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \operatorname{cotan} x + C \quad \left(D = \cup_{k\in\mathbb{Z}} ]k\pi, \pi + k\pi[\right).$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C \quad (D = \mathbb{R})\,.$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C \quad (D = ]-1, 1[)\,.$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{argsh} x \quad (D = \mathbb{R}).$

9. $$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \quad (D = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[)\,,\\ &= \operatorname{argch} x + C \quad (D = ]1, +\infty[)\,.\end{aligned}$$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C \quad (D = \left]-\infty,-1\right[ \cup \left]1,+\infty\right[)$,
$\quad = \operatorname{argch} x + C \quad (D = \left]1,+\infty\right[)$.

11. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \quad (D = \left]1,+\infty\right[ \cup D = \left]-1,1\right[ \cup \left]1,+\infty\right[)$,
$\quad = -\operatorname{arctanh} x + C \quad (D = \left]-1,1\right[)$.

#### 2.2.3. Uilisation des propriétés algébriques pour le calcul de primitives ou d'intégrales

**Principe** Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ continue, s'écrivant comme une somme (finie) de fonctions continues sur $I$

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n \quad \text{avec pour tout } i \in \{1,\ldots,n\}, \quad f_i \text{ continue sur } I.$$

Alors

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int f_n(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

De même si $f = \lambda g$, avec $g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ continue, on a

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int g(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

**Remarque 3.** *De même, si $[a,b] \subset I$, on a*

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b \lambda g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exemple 9.** *On a*

$$\int_{-1}^1 \left(4x^3 + 2x^2 + x\right)\,\mathrm{d}x = 4\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

**Remarque 4.** *De manière plus générale, soit la fonction polynôme*

$$P(x) = \sum\nolimits_{i=0}^n a_i x^i.$$

*En combinant le principe énoncé plus haut et le calcul des primitives usuelles, on a*

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = \sum\nolimits_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + C$$

## 3. INTEGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

Dans une expression du type $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'élément $f(x)\,\mathrm{d}x$ s'appelle souvent *l'élément différentiel*. Le calcul de primitives par changement de variables est basé sur des transformations de cet élément différentiel lorsque celui ci possède des formes particulières.

### 3.1. Changement de variable direct

#### 3.1.1. Enoncé du principe et application au calcul de primitives

**Principe** Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue sur l'intervalle $I$, $\varphi \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ avec $\varphi(J) \subset I$ dérivable. Alors l'application $x \mapsto f(\varphi(x))\, \varphi'(x)$ définie sur $J$ admet $F \circ \varphi$ comme primitive, où $F$ est une primitive de $f$. En effet, on a

$$\forall x \in J, \quad (F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\, \varphi'(x) = f(\varphi(x))\, \varphi'(x).$$

On écrit cela abusivement

$$\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = F \circ \varphi + k.$$

De manière plus précise si $(\alpha, \beta) \in J^2$ (intervalle de définition de $\varphi$) on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = [F(\varphi(x))]_\alpha^\beta = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Ce principe est à utiliser pour calculer des primitives ou des intégrales définies dans lesquelles l'élément différentiel se présente sous la forme

$$u^q(x)u'(x)\, \mathrm{d}x \qquad \frac{u'(x)}{u^q(x)}\, \mathrm{d}x \quad (q \text{ désigne ici un rationnel positif}).$$

**Exemples 10.**
*i. La fonction* $\tan$ *est définie et continue sur chaque intervalle* $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, $k$ *décrivant* $\mathbb{Z}$. *On a* $\int \frac{\sin x}{\cos x}\, \mathrm{d}x = -\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x$ *avec* $f(x) = 1/x$, $\varphi(x) = \cos x$. *D'où*

$$\int \tan x\, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C,$$

*sur chaque intervalle* $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$.
*ii. On a, sur* $\mathbb{R}$,

$$\int \sin^2 x \cos x\, \mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x$$

*avec* $f(x) = x^2$ *et* $\varphi(x) = \sin x$. *D'où*

$$\int \sin^2 x \cos x\, \mathrm{d}x = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Dans la pratique on écrira souvent les calculs sous la forme

$$\begin{aligned}\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x &= \int f(y)\, \mathrm{d}y \ \text{ avec : } y = \varphi(x),\ \mathrm{d}y = \varphi'(x)\, \mathrm{d}x,\\ &= F(y) + C,\ \text{ où } F \text{ est une primitive de } f,\\ &= F(\varphi(x)) + C.\end{aligned}$$

#### 3.1.2. Le cas d'une intégrale définie

On dispose de deux méthodes :
*i.* On calcule une primitive de la fonction sous le signe ‹ ‹ $\int$ ›› (sans se préoccuper des bornes) et on achève le calcul en utilisant la formule fondamentale :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = [\Phi(x)]_\alpha^\beta \ ,$$

où $\Phi$ est la primitive calculée de la fonction sous le signe ‹‹ $\int$ › ›.
*ii.* On effectue le changement de bornes dans l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\, \mathrm{d}y.$$

**Exemple 11.** *Soit à calculer* $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx$.

*i. Première méthode. On a (cf exemple 10)*

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

*D'où*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} = 1/3.$$

*ii. Deuxième méthode. On a*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx &= \int_{\sin 0}^{\sin(\pi/2)} y^2 \, dy \quad \textit{(on pose } y = \sin x, \, dy = \cos x \, dx\textit{)}, \\ &= \int_0^1 y^2 \, dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = 1/3.\end{aligned}$$

### 3.2. Changement de variable inverse

#### 3.2.1. Enoncé du principe et application au calcul de primitives

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue sur l'intervalle $I$, $\varphi \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ dérivable telle que $\varphi(J) = I$ . Posons

$$g : t \mapsto f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Considérons $G$ une primitive de $g$. On a donc

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = G(t) + C.$$

Par ailleurs, pour toute primitive $F$ de $f$, on a

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + C'$$

Ainsi

$$F(\varphi(t)) = G(t) + C''.$$

Si $\varphi$ possède une fonction inverse $\varphi^{-1}$, on a

$$F(x) = G\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C''$$

Ainsi, une primitive de $F$ s'obtient en composant $G$ avec l'inverse de $\varphi$. C'est le principe du changement de variable inverse.

**Principe** Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ continue sur l'intervalle $I$, $\varphi \in \mathcal{F}(J, I)$ avec $\varphi(J) = I$ de classe $C^1$ bijective :

$$\begin{array}{ccccc} J & \overset{\varphi}{\to} & I & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) & \mapsto & f(\varphi(t)) \end{array}.$$

Une primitive de $f$ s'écrit $G \circ \varphi^{-1}$ où $G$ est une primitive de la fonction $g : t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Dans la pratique, on écrira

$$\begin{aligned}\int f(x) \, dx &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt \;\text{ avec : } x = \varphi(t), \; dx = \varphi'(t) \, dt, \\ &= G(t) + C, \;\text{ où } G \text{ est une primitive de } t \mapsto f(\varphi(t)) \varphi'(t), \\ &= G\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C.\end{aligned}$$

**Exemple 12.** *Considérons la fonction* $f$ *définie sur* $]-1,1[$ *par* $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. *Cette fonction est continue sur cet intervalle et y admet donc des primitives. On constate que la fonction* $t \mapsto g(\sin t)$ *possède une écriture simple*

$$f(\sin t) = 1/\sqrt{1-\sin^2 t} = 1/\left|\cos t\right|$$

*Pour* $t \in ]-\pi/2, \pi/2[$, *on a* $\cos t > 0$ *d'où* $f(\sin t) = 1/\cos t$. *On écrit*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t \text{ avec : } x = \sin t,\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t,\ t \in ]-\pi/2, \pi/2[\,, \\ &= \int 1\,\mathrm{d}t = t + C = \arcsin x + C,\ \text{pour } x \in ]-1,1[\,.\end{aligned}$$

*Cet exemple montre une manière de retrouver cette primitive usuelle.*

**Exemple 13.** *Soit* $f$ *définie sur* $]-1,1[$ *par* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. *On a*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \cos t \cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{avec : } x = \sin t,\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t,\ t \in ]-\pi/2, \pi/2[ \\ &= \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\ \mathrm{d}t \quad (\text{Car } \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1), \\ &= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}(t + \cos t \sin t) + C.\end{aligned}$$

*Or, pour* $t \in ]-\pi/2, \pi/2[$, *on a* $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ *(car la fonction* cos *est positive sur cet intervalle). D'où*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(t + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) + C, \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C,\quad x \in ]-1,1[\,.\end{aligned}$$

### 3.2.2. Le cas d'une intégrale définie

On rappelle qu'avec les notations précédentes, on a

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C$$

où $G$ est une primitive d ela fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
D'où

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \left[G\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right]_a^b = G\left(\varphi^{-1}(b)\right) - G\left(\varphi^{-1}(a)\right) = [G(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci justifie les deux mêmes méthodes que pour le changement de variable directe :
$i$. on calcule une primitive de la fonction sous le signe somme (sans se préoccuper des bornes) et on achève le calcul en utilisant la formule fondamentale :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b\ ,$$

où $F$ est la primitive calculée de la fonction sous le signe ‹‹ $\int$ ›› c'est-à-dire $F = G \circ \varphi^{-1}$ ;
$ii$. on effectue le changement de bornes dans l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [G(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}$$

où $G$ est la primitive calculée de la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

**Exemple 14.** *Soit à calculer* $\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.
$i$. Première méthode. *On a (cf exemple 12)*

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)+C,\quad x\in\left]-1,1\right[.$$

*D'où*

$$\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^{1/2}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$i$. Deuxième méthode. *On a*

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_{\arcsin 0}^{\arcsin(1/2)}\cos t\cos t\,\mathrm{d}t\quad \textit{avec : } x=\sin t,\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t,\\&=\int_0^{\pi/6}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\left(1+\cos 2t\right)\,\mathrm{d}t,\\&=\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_0^{\pi/6}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

## 3.3. Applications du changement de variable

*On insiste pour dire qu'il s'agit de retenir les méthodes de calcul de primitive et non le détail des calculs qu'il convient de refaire à chaque fois. (Ou de faire faire par une calculatricead hoc.)*

### 3.3.1. Primitives de la forme $\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x\ (a\neq 0)$

On commence par écrire le trinôme $ax^2+bx+c$ sous forme canonique :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

3 cas se présentent.

$\Delta=b^2-4ac>0$ **et** $a>0$ **:** on a alors

$$ax^2+bx+c=\frac{\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2ax+b}{\Delta}\right)^2-1\right)\quad\text{avec }\frac{\Delta}{4a}>0.$$

Le changement de variable $t=(2ax+b)/\Delta$ ramène au calcul d'une primitive du type $K\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$. Rappelons que

$$\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)+C\text{ pour }|t|>1.$$

$\Delta=b^2-4ac<0$ **et** $a>0$ **:** on a alors

$$ax^2+bx+c=-\frac{\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2ax+b}{\Delta}\right)^2+1\right)\quad\text{avec }-\frac{\Delta}{4a}>0.$$

Le changement de variable $t=(2ax+b)/\Delta$ ramène au calcul d'une primitive du type $K\int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$, avec

$$\int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+C.$$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ **et** $a < 0$ **:** on a alors

$$ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a}\left(1 - \left(\frac{2ax+b}{\Delta}\right)^2\right) \quad \text{avec} \quad -\frac{\Delta}{4a} > 0.$$

Le changement de variable $t = (2ax+b)/\Delta$ ramène au calcul d'une primitive du type $K \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$, avec

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t + C, \text{ pour } |t| < 1.$$

**Remarque 5.** *Le cas $b^2 - 4ac \leq 0$ et $a < 0$ donne une fonction nulle part définie. Enfin, le cas $b^2 - 4ac = 0$ et $a > 0$ donne une fonction se simplifiant en*

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{|x - b/2a|}\,\mathrm{d}x$$

*dont on cherche les primitives séparément sur chacun des intervalles $]-\infty, b/2a[$ et $]b/2a, +\infty[$.*

**Exemples 15.** *Le lecteur appliquera les méthodes décrites ci-dessus pour vérifier que :*
*i.* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2-x+1}\right) + C = \operatorname{arcsinh} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ ;
*ii.* $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ ;
*iii.* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}\right) + C = \operatorname{arcsinh} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right) + C.$

### 3.3.2. Primitives de la forme $\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$

On écrit $\alpha x + \beta = \frac{\alpha}{2a}(2ax+b) + \beta - \frac{\alpha b}{2a}$. D'où

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x + \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x.$$

Le changement de variable $u = ax^2 + bx + c$, $\mathrm{d}u = 2ax + b$ permet le calcul de la première primitive

$$\frac{\alpha}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{a}\sqrt{(ax^2+bx+c)} + C.$$

La deuxième appartient aux types étudiés au paragraphe 3.3.1 précédent.

**Exemple 16.** *Le lecteur vérifiera que*

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-2}{\sqrt{-x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{-2x+1}{\sqrt{-x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x,\\ &= 2\sqrt{(x^2-x+1)} - \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

*Il précisera le domaine de validité de ce calcul.*

#### 3.3.3. Primitives de la forme $\int \frac{1}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$

Le changement de variable $y = 1/(\alpha x+\beta)$ ramène à une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{\sqrt{a'y^2+b'y+c'}}\,\mathrm{d}y$$

qui appartient aux types étudiés au paragraphe 3.3.1 précédent.

**Exemple 17.** *Soit à calculer* $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+2)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x.$
*On pose* $y = 1/(x+1)$. *D'où* $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}y/y^2$ *(on travaille sur chacun des intervalles* $]-\infty,-1[$ *et* $]1,+\infty[$*)*

$$\int \frac{1}{(2x+2)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y\sqrt{1/y^2-1/y+1}}\,\mathrm{d}y.$$

*On a*

$$\text{Pour } y>0 :\ -\int \frac{1}{y\sqrt{1/y^2-1/y+1}}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{1}{\sqrt{y^2-y+1}}\,\mathrm{d}y = -\operatorname{arcsinh}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y-\frac{1}{2}\right)+C,$$

$$\text{Pour } y<0 :\ -\int \frac{1}{y\sqrt{1/y^2-1/y+1}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{y^2-y+1}}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arcsinh}\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(y-\frac{1}{2}\right)+C.$$

*D'où, finalement*

$$\text{pour } x>-1 :\ -\int \frac{1}{y\sqrt{1/y^2-1/y+1}}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{1}{\sqrt{y^2-y+1}}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arcsinh}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x-1}{x+1}+C,$$

$$\text{pour } x<-1 :\ -\int \frac{1}{y\sqrt{1/y^2-1/y+1}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{y^2-y+1}}\,\mathrm{d}y = -\operatorname{arcsinh}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x-1}{x+1}+C.$$

#### 3.3.4. Primitives de la forme $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

Comme au paragraphe 3.3.1 on commence par écrire le trinôme $ax^2+bx+c$ sous forme canonique :

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

3 cas se présentent.

$\Delta = b^2-4ac>0$ **et** $a>0$ **:** on a alors

$$ax^2+bx+c = \frac{\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2ax+b}{\Delta}\right)^2-1\right) \quad \text{avec } \frac{\Delta}{4a}>0.$$

Le trinôme admet deux racines distinctes $x_1$ et $x_2$ avec $x_1<x_2$. La fonction sous le signe intégral, est définie sur $]-\infty,x_1[$ et $]x_2,+\infty[$. On pose alors

$$\operatorname{ch} t = \varepsilon\frac{2ax+b}{\Delta} \quad \text{avec } \varepsilon=-1 \text{ si } x<x_1 \quad \varepsilon=1 \text{ si } x>x_2. \tag{3.1}$$

La racine carrée s'écrit $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\Delta}/(2\sqrt{a})\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1} = \sqrt{\Delta}/(2\sqrt{a})\,|\operatorname{sh} t|$. Cependant, la valeur absolue peut être omise, la relation 3.3.1 assurant que $t$ est positif. Ainsi, avec $x = (\varepsilon\Delta\operatorname{ch} t-b)/(2a)$, $\mathrm{d}x = (\varepsilon\Delta\operatorname{sh} t)/(2a)\,\mathrm{d}t$, est on ramené au calcul d'une primitive de

$$K\int \operatorname{sh}^2 t\,\mathrm{d}t$$

Or $\operatorname{sh}^2 t = \dfrac{ch2t-1}{2}$. D'où

$$\int \operatorname{sh}^2 t \,\mathrm{d}t = \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t - \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t - \frac{1}{2}t + C,$$

expression que l'on réécrit en fonction de $x$.

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ **et** $a > 0$ **:** on a alors

$$ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2ax+b}{\Delta}\right)^2 + 1\right) \quad \text{avec} \quad -\frac{\Delta}{4a} > 0.$$

On pose ici $\operatorname{sh} t = \dfrac{2ax+b}{\Delta}$.On ramené au calcul d'une primitive de On ramené au calcul d'une primitive de $K \int \operatorname{ch}{}^2 t \,\mathrm{d}t$. On a

$$\int \operatorname{ch}{}^2 t \,\mathrm{d}t = \int \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t + \frac{1}{2}t + C,$$

expression que l'on réécrit en fonction de $x$.

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ **et** $a < 0$ **:** on a alors

$$ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a}\left(1 - \left(\frac{2ax+b}{\Delta}\right)^2\right) \quad \text{avec} \quad -\frac{\Delta}{4a} > 0.$$

Le trinôme admet deux racines distinctes $x_1$ et $x_2$ avec $x_1 < x_2$. La fonction sous le signe intégral, est définie sur $]x_1, x_2[$. On pose alors $\sin t = (2ax+b)/\Delta$ avec $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos t \,\mathrm{d}t = (2a/\Delta)\,\mathrm{d}x$. On est ramené au calcul d'une primitive du type $K \int \cos^2 t \,\mathrm{d}t$ (Il n'y a pas de valeur absolue, la fonction cos étant positive sur $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\int \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos 2t + 1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\sin t \cos t + \frac{1}{2}t + C,$$

expression que l'on réécrit en fonction de $x$.

**Remarque 6.** *Le cas $b^2 - 4ac \leq 0$ et $a < 0$ donne une fonction nulle part définie. Enfin, le cas $b^2 - 4ac = 0$ et $a > 0$ donne une fonction se simplifiant en*

$$\sqrt{a}\int |x - b/2a| \,\mathrm{d}x,$$

*dont on cherche les primitives séparément sur chacun des intervalles $]-\infty, b/2a[$ et $]b/2a, +\infty[$.*

**Exemples 18.** *Le lecteur appliquera les méthodes décrites ci-dessus pour vérifier que :*

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{8}\ln\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 - x + 1}\right) + C, \\
&= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{8}\operatorname{arcsinh}\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C\,; \\
\int \sqrt{-x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{(-x^2 + x + 1)} + \frac{5}{8}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C\,; \\
\int \sqrt{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{(x^2 + x + 1)} + \frac{3}{8}\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C, \\
&\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{(x^2 + x + 1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arcsinh}\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

## 4. INTEGRATION PAR PARTIES

### 4.1. Principe

Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ($I$ intervalle réel) dérivables sur $I$ et à dérivée continue sur $I$. On rappelle que

$$(fg)' = fg' + f'g.$$

Ainsi, une primitive de $fg'$ est égale à $fg - H$ où $H$ est une primitive de $f'g$ ce qu'on peut noter

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = fg - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

ou encore

$$\int f dg = fg - \int g df.$$

De manière plus précise, pour tout $(a, b) \in I^2$, on a

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

avec $[f(x)\,g(x)]_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$.

### 4.2. Applications au calcul de primitives

#### 4.2.1. Les expressions du type $\int P(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, où $P$ est un polynôme et $\varphi(x) = \sin\omega x$, $\cos\omega x$, $\exp\alpha x$.

**Principe** Si $\varphi$ est une fonction comme sin, cos, exp, on posera $f = P$ et $g' = \varphi$. (Moyen mnemotechnique : on fait baisser le degré du polynôme dans le terme intégral du membre de droite.)

Ce principe est justifié par le fait que les primitives des fonctions citées est d'expression simple.

**Exemples 19.**

*i. Calcul de* $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x$. *On pose* $f(x) = x$ *et* $g'(x) = \sin x$. *On peut écrire*

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C.$$

*ii. Calcul de* $\displaystyle\int_0^1 x\exp\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$. *On pose* $f(x) = x$ *et* $g'(x) = \dfrac{1}{2}\exp x$. *On a*

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

**Remarque 7.** *Il est parfois nécessaire de faire plusieurs intégrations par parties successives.*

**Exemple 20.** *Calcul de* $\displaystyle\int x^2\sin 2x\mathrm{d}x$. *On pose* $f(x) = x^2$ *et* $g'(x) = \sin 2x$. *D'où*

$$\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x.$$

*Puis* $f(x) = x$ *et* $g'(x) = \cos 2x$. *D'où*

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x.$$

*D'où, finalement*

$$\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x.$$

#### 4.2.2. Les expressions du type $\int P(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, où $P$ est un polynôme et $\varphi = \ln x,\ \arctan x$

**Principe** Si $\varphi$ est une fonction comme $\ln x$, $\arctan x$, on posera $g' = P$ et $f = \varphi$. (Moyen mnemotechnique : on augmente le degré du polynôme dans le terme intégral du membre de droite.)

Ce principe est justifié par le fait que les dérivées des fonctions citées sont des polynômes, ou des fractions rationnelles.

**Remarque 8.** *Par extension, on utilise le même principe pour les fonctions inverses des fonctions trigonométriques ou hyperboliques dont les dérivées sont des racines carrées de fractions rationnelles.*

**Exemples 21.**

*i. Calcul de* $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$. *On pose* $g'(x) = 1$ *et* $f(x) = \ln x$. *On peut écrire*

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

*ii. Calcul de* $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$. *On pose* $g'(x) = x$ *et* $f(x) = \arctan x$. *On a*

$$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

*On note que :* $\dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$. *D'où*

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x - \arctan x + C.$$

*D'où*

$$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}x + C.$$

**Remarque 9.** *Dans l'exemple ci-dessus, on peut choisir comme fonction* $g$ *la fonction* $x \mapsto \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$ *ce qui simplifie le calcul. On a*

$$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x - \frac{1}{2}x + C.$$

#### 4.2.3. Les expressions du type $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x\,\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x\,\mathrm{d}x$ (avec $\alpha \neq 0$ et $\omega \neq 0$)

Etudions par exemple $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x\,\mathrm{d}x$. On procède par double intégration par parties. Posons $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$ $g'(x) = \sin\omega x$. On a donc

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x + \frac{\alpha}{\omega}\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x\,\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

Posons $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$ et $g'(x) = \sin\omega x$. On a

$$\frac{\alpha}{\omega}\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\omega^2}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x\,\mathrm{d}x$$

D'où, en remplacant dans (4.1)

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x + \frac{\alpha}{\omega^2}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x + C.$$

D'où

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x\,\mathrm{d}x = -\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x + \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x + C$$

Ainsi, le principe consiste ici à retrouver l'intégrale initiale dans le membre de droite, après deux intégrations par parties.

#### 4.2.4. Remarques

**Remarque 10.** *Dans la pratique, on pourra employer deux autres méthodes, pour trouver des primitives du type* $\int \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \omega x \, \mathrm{d}x$, $\int \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \omega x \, \mathrm{d}x$ *:*
$i$. Utiliser les fonctions à valeurs complexes. *On a*

$$\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \omega x = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{i\omega x}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)x}\right).$$

*On admet ici que*

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\alpha+i\omega}\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)x} + C = \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2}\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)x} + C \quad C \textit{ constante complexe,}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha-i\omega)\left(\mathrm{e}^{i\omega x}\right) + C\end{aligned}$$

*D'où, en admettant que* $\int \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)x}\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int \left(\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)x}\right)\,\mathrm{d}x\right)$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha-i\omega)\left(\mathrm{e}^{i\omega x}\right)\right) + C', \quad C' \textit{ constante réelle,}\\ &= \frac{\omega\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\omega^2}(-\omega\cos\omega x + \alpha\sin\omega x) + +C.\end{aligned}$$

$ii$. Utiliser un procédé d'indentification. *On retient des calculs précédents que toute primitive de la fonction* $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x$ *est du type* $\Phi : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x) + C$. *On identifie alors* $\Phi'$ *et* $\varphi$, *soit*

$$\Phi'(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left((\alpha A + \omega B)\cos\omega x + (\alpha B - \omega A)\sin\omega x\right) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x.$$

*D'où le système d'équations linéaires en* $(A, B)$,

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha A + \omega B &=& 0\\ -\omega A + \alpha B &=& 1\end{array}\right.$$

*Il vient* $A = -\omega/\left(\alpha^2+\omega^2\right)$ *et* $B = \alpha/\left(\alpha^2+\omega^2\right)$.

**Remarque 11.** *Le procédé d'identification exposé dans la remarque 10-ii. ci-dessus peut aussi être utilisé avec profit pour les primitives du type* $\int P(x)\exp(\alpha x)\,\mathrm{d}x$. *En effet, on a*

$$\int P(x)\exp(\alpha x)\,\mathrm{d}x = Q(x)\exp(\alpha x) + C,$$

*où* $Q$ *est une fonction polynôme de même degré que* $P$.

**Exemple 22.** *Soit à calculer* $\int_0^1 \left(x^2+3x-1\right)\exp(2x)\,\mathrm{d}x$. *On écrit qu'il existe une primitive de la fonction sous le signe ‹‹* $\int$ *››s'écrivant*

$$T(x) = \left(ax^2+bx+c\right)\exp(2x).$$

*Comme* $T'(x) = \left(2ax^2 + 2(b+a)x + 2c + b\right)\exp(2x)$ *on a*

$$2a = 1, \;\; 2b + 2a = 3, \;\; 2c + b = -1.$$

*D'où* $a = 1/2$, $b = 1$, $c = c = -1$ *et*

$$\int_0^1 \left(x^2+3x-1\right)\exp(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right)\exp(2x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 1.$$

# 5. INTEGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES

## 5.1. Quelques rappels sur les fonctions polynômes et rationnelles

### 5.1.1. Généralités sur les fonctions polynômes

Soit $P$ une fonction polynôme **non nulle** à coefficients réels de degré $n$. On rappelle qu'on appelle zéro ou racine réelle (*resp.* complexe) de $P$ tout réel (resp. complexe) $a$ tel que $P(a) = 0$. On sait que

**Proposition 5.1.** *La fonction polynôme $P$ non nulle possède au plus $n$ racines distinctes.*

**Proposition 5.2.** *Soit $x_0$ un nombre réel. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes ;*
*i. le réel $x_0$ est racine de $P$ ;*
*ii. il existe une fonction polynôme $p_1$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - x_0)P_1(x)$.*
*De plus la fonction polynôme $P_1$ est de degré $n - 1$.*

Si $x_0$ est racine de $P$, il est possible que $x_0$ soit aussi racine de $P_1$ (Ceci, si le degré de $P_1$ est supérieur ou égal à 1). Alors, il existe une fonction polynôme $P_2$ de degré $n - 2$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_1(x) = (x - x_0)P_2(x)$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - x_0)^2 P_2(x)$. Ce processus a cependant une fin, puisque le degré de la fonction polynôme du membre de droite décroit: il existe un entier $p_0$ (nécessairement inférieur ou égal à $n$) tel que

$$P(x) = (x - x_0)^{p_0} P_{p_0}(x) \qquad x_0 \text{ n'est pas racine de } P_{p_0} \tag{5.1}$$

Ceci justifie la définition suivante :

**Définition 4.** *On appelle ordre ou multiplicité de la racine $x_0$ de $P$ l'entier $p_0$ mis en évidence dans la relation 5.1.*

Une racine d'ordre de multiplicité 1 est appelée racine simple, d'ordre de multiplicité 2, racine double, *etc.*

**Exemple 23.** Le trinôme du second degré.- *Soit $P(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ une fonction polynôme trinôme du second degré. On rappelle que :*
*i. si $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $P$ possède deux racines réelles simples distinctes :*
*ii. si $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $P$ possède une racine double (on a alors $P(x) = (x - \alpha/2)^2$) :*
*ii. si $\alpha^2 - 4\beta < 0$, $P$ ne possède pas de racine réelle (mais deux racines complexes conjuguées).*

**Théorème 5.3.** *Il existe une écriture, unique à l'ordre des facteurs près de $P$ sous la forme*

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{l} \left(x^2 + \alpha_j x + \beta_j\right)^{s_j} \tag{5.2}$$

*où :*
*i. les $x_i$, sont les racines de $P$, de multiplicité $r_i$,*
*ii. $r_1 + \ldots + r_k + 2(s_1 + \ldots + s_l) = n$,*
*iii. les fonctions trinômes $x \mapsto x^2 + \alpha_j x + \beta_j$ n'ont pas de racines réelles (ce qui équivaut à $\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$).*

La décomposition (5.2) est souvent appeler la décomposition de $P$ en produit de (fonctions) polynômes irréductibles.

**Théorème 5.4.** Division euclidienne des fonctions polynômes.- *Soit $P$ et $Q$ deux fonctions polynômes, il existe un unique couple de fonctions polynômes $E$ et $R$ avec $\deg R < \deg Q$ tel que : $P = EQ + R$.*

La fonction polynôme $P$ s'appelle le dividende, la fonction polynôme $Q$ le diviseur, $E$ le quotient et $R$ le reste. Dans la pratique pour calculer, on dispose les calculs comme une division entre nombres entiers (en rangeant les fonctions $P$ et $Q$ selon les puissances décroissantes.

**Exemple 24.** *Considérons* $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 2$, $Q(x) = x^2 - x + 2$.

**Exemple 25.** *En première étape, on divise* $x^4$ *par* $x^2$ *et on fait apparaître le reste sous le dividende :*

$$\begin{array}{r|l} \underline{x^4}+2x^3 - x^2 + 2 & x^2 - x + 2 \\ \hline \text{-}x^2\left(x^2 - x + 2\right) & \\ = \underline{3x^3} - 3x^2 + 2 & x^2 \end{array}$$

*En deuxième étape on divise* $3x^3$ *par* $x^2$ *:*

$$\begin{array}{r|l} \underline{x^4}+2x^3 - x^2 + 2 & x^2 - x + 2 \\ \hline \underline{3x^3} - 3x^2 + 2 & x^2 + 3x \\ \boxed{-6x + 2} & \end{array}$$

*La division est terminée, puisque la fonction polynôme encadrée est de degré strictement nférieur à celui du diviseur.*

### 5.1.2. Généralités sur les fractions rationnelles

On appelle *fraction rationnelle* toute fonction $f$ s'écrivant

$$f(x) = P(x)/Q(x)$$

où $P$ et $Q$ sont deux fonctions polynômes, la fonction polynôme étant de plus supposée non nulle.
Une telle écriture de $f$ sous forme de quotient de fonctions polynômes n'est pas unique. Mais, il en existe des privilégiées, celles ou la fraction $P(x)/Q(x)$ est *irréductible* :

**Définition 5.** *On dit que* $P/Q$ *est* irréductible *si l'une des conditions suivantes équivalentes est vérifiée :*
$i$. *il n'existe pas de fonction polynôme* $S$ *non constante (donc de degré supérieur ou égal à* 1*) telle que simultanément* $P = SP_1$ *et* $Q = SQ_1$*, où* $P_1$ *et* $Q_1$ *sont des fonctions polynômes ;*
$ii$. *les fonctions polynômes* $P$ *et* $Q$ *n'ont pas de racine* ***complexe*** *commune.*

L'équivalence entre $i$. et $ii$. provient des remarques suivantes.
1. si $P$ et $Q$ ont une racine commune $a$ alors il existe $p$ et $q$, deux fonctions polynomes telles que

$$P(x) = (x - a)p(x) \qquad Q(x) = (x - a)q(x).$$

La fractions rationnelle $P/Q$ n'est pas irréductible.
2. S'il existe des fonctions polynômes $S$ (de degré supérieur ou égal à 1), $P_1$ et $Q_1$ telles que $P = SP_1$ et $Q = SQ_1$, $S$ admet au moins une racine réelle ou complexe et $P$ et $Q$ ont une racine commune.

Dans la suite, on considérera toujours une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible.

On appelle *pôle* de $f$ tout zéro (on dit aussi racine) de $Q$. Supposons $Q$ de degré $n$. La fonction $Q$ possède au plus $n$ zéros. La fonction $f$ est donc définie sauf au plus en $n$ points. Ainsi, l'ensemble de définition de $f$ est une réunion d'au plus $n + 1$ intervalles. Sur chacun de ces intervalles, on démontre que $f$ est continue, et même indéfiniment dérivable.

**Exemples 26.**
*i.* *Considérons* $f(x) = \left(x^4 + 2x^2 - 3x - x^3 + 1\right)/(x^3 - 1)$. *Cette fonction n'est pas a a priori définie en* $x = 1$. *Posons*

$$P(x) = x^4 + 2x^2 - 3x - x^3 + 1 \qquad Q(x) = x^3 - 1.$$

*On remarque que* $x = 1$ *est racine de* $P$ *et* $Q$. *On a*

$$P(x) = (x-1)\left(x^3 + 2x - 1\right) \quad Q(x) = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right).$$

*Posons* $p(x) = x^3 + 2x - 1$ *et* $q(x) = x^2 + x + 1$. *On remarque que* $q$ *n'a pas de racine réelle (son discriminant est strictement négatif) : les racines complexes de* $q$ *sont les nombres* $j = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ *et* $j^2 = \overline{j} = -1/2 - i\sqrt{3}/2$ *qui n'annulent pas* $P$ *(On rappelle que* $j^3 = 1$*). Ainsi* $Q$ *n'a pas de racine commune avec* $P$. *Ainsi la fraction rationnelle* $p/q$ *est irréductible.*
*ii.* *Considérons* $g(x) = \left(x^3 + x + 1\right)/\left(x^4 - 2x^2 + 1\right)$. *On remarque que :*

$$Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2 (x+1)^2.$$

*Aucune des racines de* $Q$ *n'est racine de* $P(x) = x^3 + x + 1$. *Ainsi, la fraction rationnelle* $P/Q$ *est irréductible. L'ensemble de définition de* $g$ *est* $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

### 5.2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

On rappelle le théorème fondamental suivant.

**Théorème 5.5.** *Soit* $P/Q$ *une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, avec*

$$Q(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{l} \left(x^2 + \alpha_j x + \beta_j\right)^{s_j}, \tag{5.3}$$

*avec* $\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$ *pour* $j = 1, ..., l$.
*Il existe une fonction polynôme* $E$ *(éventuellement nulle) une somme* $S$ *et une somme* $T$ *unique à l'ordre des termes près, tels que sur l'ensemble de définition de* $P/Q$ *on ait*

$$P(x) = E(x) + \sum_{i=1}^{k} S_i(x) + \sum_{j=1}^{l} T_j(x).$$

*où chaque* $S_i$ *et* $T_j$ *s'écrit*

$$S_i(x) = \frac{b_{i,1}}{x - x_i} + \frac{b_{i,2}}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{b_{i,r_i}}{(x - x_i)^{r_i}}, \text{ pour } i = 1, ..., k$$
$$T_j(x) = \frac{c_{j,1}x + d_{j,1}}{x^2 + \alpha_j x + \beta_j} + \frac{c_{j,2}x + d_{j,2}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^2} + \ldots + \frac{c_{j,s_j}x + d_{j,s_j}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{s_j}}.$$

Dans cette écriture :
*i.* les coefficients $(b_{i,m})_{1 \le i \le k, 1 \le m \le r_i}$ $(c_{j,m})_{1 \le j \le l, 1 \le m \le s_j}$, $(d_{j,m})_{1 \le j \le l, 1 \le m \le s_j}$ sont des constantes réelles à déterminer ;
*ii.* $E$ est le quotient de la division euclidienne de $P$ par $Q$. En désignant par $R$ le reste, on a en fait

$$R(x)/Q(x) = \sum_{i=1}^{k} S_i(x) + \sum_{j=1}^{l} T_j(x).$$

La décomposition d'une fraction rationnelle comprend donc les étapes suivantes :
*i.* on détermine $E$ et $R$ en effectuant la division euclidienne de $P$ par $Q$ (cette étape est donc inutile lorsque $\deg P < \deg Q$ : dans ce cas, on a $E = 0$ et $R = P$) ;
*ii.* on détermine la décomposition de $Q$ en produit de (fonctions) polynômes irréductibles, donnant l'écriture 5.3 ;

*iii.* on détermine la décomposition théorique de $R/Q$ en éléments simples, en appliquant le théorème 5.5 ;
*iv.* on calcule les coefficients de la décomposition en éléments simples.

Il existe plusieurs méthodes de calcul des différents coefficients. Nous présentons dans les exemples ci-dessous un *kit de survie* qui permet de conduire ces calculs sinon le plus rapidement possible, du moins avec efficacité et sécurité.

**Exemple 27.** *Considérons* $f(x) = \left(x^4 + 2x - 1\right)/(x^3 - 1)$. *Posons*

$$P(x) = x^4 + 2x - 1 \qquad Q(x) = x^3 - 1.$$

*On a* $P(x) = \left(x^4 + 2x - 1\right) = (x^3 - 1)x + 3x - 1$. *D'où*

$$f(x) = x + \frac{3x - 1}{x^3 - 1}.$$

*avec* $Q(x) = x^3 - 1 = (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right)$.*D'après le théorème 5.5, il existe* $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ *tels que*

$$\frac{3x - 1}{x^3 - 1} = \frac{b}{x - 1} + \frac{cx + d}{x^2 + x + 1}.$$

*Plusieurs méthodes existent pour déterminer* $b,\ c,\ d$ *: la plus simple reste de réduire au dénominateur commun le membre de droite et d'identification membre à membre, ce qui donne*

$$3x - 1 = (b + c)x^2 + (b - c + d)\,x + b - d.$$

*D'où*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & b + c, \\ 3 & = & b - c + d, \\ -1 & = & b - d. \end{array}\right.$$

*Puis :* $b = \frac{2}{3},\ c = -\frac{2}{3},\ d = \frac{5}{3}$. *D'où, finalement,*

$$\frac{x^4 + 2x - 1}{x^3 - 1} = x + \frac{2}{3\,(x - 1)} - \frac{1}{3}\frac{2x - 5}{x^2 + x + 1}.$$

**Exemple 28.** *Considérons* $g(x) = \left(x^3 + x + 1\right)/\left(x^4 - 2x^2 + 1\right)$.

$$P(x) = x^3 + x + 1 \qquad Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2\,(x + 1)^2\,.$$

*Ici la partie* $E$ *est nulle puisque* $\deg P < \deg Q$. *Selon le théorème 5.5, il existe* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *tels que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 + x + 1}{(x - 1)^2\,(x + 1)^2} = \frac{a}{(x - 1)} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{c}{(x + 1)} + \frac{d}{(x + 1)^2}. \qquad (5.4)$$

*On propose deux méthodes pour déterminer* $a,\ b,\ c,\ d$.
*Première méthode.- Les termes* $b$ *(resp.* $d$*) s'obtiennent en mutlipliant l'identité (5.4) par* $(x - 1)^2$ *(resp.* $(x + 1)^2$*) et en faisant* $x = 1$ *(resp.* $x = -1$*) dans l'égalité obtenue*

$$\frac{x^3 + x + 1}{(x + 1)^2} = b + (x - 1)\,a + (x - 1)^2\left(\frac{c}{(x + 1)} + \frac{d}{(x + 1)^2}\right)$$

$$\text{(resp. } \frac{x^3 + x + 1}{(x - 1)^2} = d + (x + 1)\,c + (x - 1)^2\left(\frac{a}{(x - 1)} + \frac{b}{(x - 1)^2}\right)\text{ ).}$$

*D'où*

$$b = 3/4 \text{ (resp. } d = -1/4\text{).}$$

*En multipliant l'identité (5.4) par $x$ et en faisant tendre $x$ vers $+\infty$, on obtient*

$$1 = a + c.$$

*Une dernière équation peut être obtenue en faisant $x = 0$, soit*

$$1 = -a - b + c + d.$$

*D'où finalement $a = 1/4,\ b = 3/4,\ c = 3/4,\ d = -1/4$.*

*Deuxième méthode.- On procède comme dans l'exemple 27, en réduisant au même dominateur et en identifiant, ce qui donne*

$$x^3 + x + 1 = (a + c)\,x^3 + (a + b - c + d)\,x^2 + (-a + 2b - c - 2d)\,x - a + b + c + d.$$

*D'où*

$$\begin{cases} 1 &= a + c, \\ 0 &= a + b - c + d, \\ 1 &= -a + 2b - c - 2d, \\ 1 &= -a + b + c + d, \end{cases}$$

*et $a = 1/4,\ b = 3/4,\ c = 3/4,\ d = -1/4$.*

### 5.3. Pratique de la recherche de primitives des fractions rationnelles

#### 5.3.1. Méthode

Le calcul des primitives d'une fraction rationnelle $P/Q$ comprend deux étapes :
$i$. la décomposition en éléments simples de $P/Q$

$$P(x) = E\,(x) + \textstyle\sum_{i=1}^{k} \left( \dfrac{b_{i,1}}{x - x_i} + \dfrac{b_{i,2}}{(x - x_i)^2} + \ldots + \dfrac{b_{i,r_i}}{(x - x_i)^{r_i}} \right)$$
$$+ \textstyle\sum_{j=1}^{l} \left( \dfrac{c_{j,1}x + d_{j,1}}{x^2 + \alpha_j x + \beta_j} + \dfrac{c_{j,2}x + d_{j,2}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^2} + \ldots + \dfrac{c_{j,s_j}x + d_{j,s_j}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{s_j}} \right).$$

$ii$. Comme l'intégration est une opération linéaire, il suffit alors de déterminer une primitive de chacun des éléments simples. On constate qu'il y a 5 types de primitives à calculer.

#### 5.3.2. Calcul des primitives des éléments simples

Dans ce qui suit, il ne s'agit pas de retenir le détail de calcul, mais les méthodes.

**Primitive de $E$.** Il s'agit d'une fonction polynôme : *cf.* remarque 4.

**Primitive d'éléments du type $\dfrac{B}{x - a}$.**

On a $\int \dfrac{B}{x - a}\,\mathrm{d}x = B \ln|x - a| + C$.

**Primitive d'éléments du type $\dfrac{B}{(x - a)^m}$ $(m > 1)$.**

On a $\int \dfrac{B}{(x - a)^m}\,\mathrm{d}x = \dfrac{B}{1 - m}\dfrac{1}{(x - a)^{m-1}} + C$.

**Primitive d'éléments du type $\dfrac{cx+d}{x^2+\alpha x+\beta}$ avec $\alpha^2-4\beta<0$.**

On écrit $\dfrac{cx+d}{x^2+\alpha x+\beta}=\dfrac{c}{2}\dfrac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}+\dfrac{d-(c\alpha)/2}{x^2+\alpha x+\beta}$.
On a

$$\frac{c}{2}\int\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x=\frac{c}{2}\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right)+C.$$

Il reste à intégrer une fraction rationelle du type $\dfrac{B'}{x^2+\alpha x+\beta}$. Or

$$x^2+\alpha x+\beta=\frac{1}{4}\left(4x^2+4\alpha x+4\beta\right)=\frac{1}{4}\left((2x+\alpha)^2+4\beta-\alpha^2\right).$$

avec $4\beta-\alpha^2>0$. Posons $\gamma=\sqrt{4\beta-\alpha^2}$. Donc

$$x^2+\alpha x+\beta=\frac{1}{4}\left((2x+\alpha)^2+\gamma^2\right)=\frac{\gamma^2}{4}\left(\left(\frac{2x+\alpha}{\gamma}\right)^2+1\right).$$

Le changement de variable $u=(2x+\alpha)/\gamma$ donne (on a $\mathrm{d}x=(\gamma/2)\,\mathrm{d}u$)

$$\begin{aligned}B'\int\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x&=\frac{4B'}{\gamma^2}\int\frac{1}{((2x+\alpha)/\gamma)^2+1}\,\mathrm{d}u=\frac{2B'}{\gamma}\int\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u,\\&=\frac{B'}{\gamma}\arctan u+C=\frac{2B'}{\gamma}\arctan\left(\frac{2x+\alpha}{\gamma}\right)+C\end{aligned}$$

**Exemple 29.** *Soit à déterminer des primitives de la fonction $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+4}$. On vérifie que le dénominateur n'a pas de racines réelles. On écrit $f$ sous la forme*

$$\frac{x+1}{x^2+x+2}=\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+2}$$

*D'où*

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+2\right)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x.$$

*On a alors $x^2+x+2=\frac{1}{4}\left((2x+1)^2+7\right)$. D'où*

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\ \text{ avec }\ u=\frac{2x+1}{\sqrt{7}}.$$

*Le lecteur vérifiera que tous calculs faits, on obtient*

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+2\right)+\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

**Primitive d'éléments du type $\dfrac{cx+d}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$.**

On écrit $\dfrac{cx+d}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}=\dfrac{c}{2}\dfrac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}+\dfrac{d-(c\alpha)/2}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$.
On a

$$\frac{c}{2}\int\frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}\,\mathrm{d}x=\frac{c}{2(1-m)}\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1}}+C.$$

Il reste à intégrer une fraction rationelle du type $\dfrac{B'}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$.

On commence par mettre l'expression sous forme canonique

$$\int \frac{1}{\left(x^2+\alpha x+\beta\right)^m}\,\mathrm{d}x = K\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^m}\,\mathrm{d}u$$

en posant $u=(2x+\alpha)/\gamma$ comme ci-dessus. On écrit alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^m}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{u^2+1}{\left(u^2+1\right)^m}\,\mathrm{d}u - \int \frac{u^2}{\left(u^2+1\right)^m}\,\mathrm{d}u,\\ &= \int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^{m-1}}\,\mathrm{d}u - \underline{\int \frac{u^2}{\left(u^2+1\right)^m}\,\mathrm{d}u.}\end{aligned}$$

Le terme souligné s'écrit $(1/2)\int \varphi'(u)/\left(\varphi(u)\right)^m u\,\mathrm{d}u$. On procède donc par intégration par parties

$$\int \frac{u^2}{\left(u^2+1\right)^m}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u}{\left(u^2+1\right)^m}u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2(1-m)}\frac{1}{\left(u^2+1\right)^{m-1}}u - \frac{1}{2(1-m)}\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^{m-1}}\,\mathrm{d}u.$$

D'où

$$\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^m}\,\mathrm{d}u = \frac{2m-3}{2(m-1)}\underline{\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^{m-1}}\,\mathrm{d}u} + \frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{\left(u^2+1\right)^{m-1}}u.$$

On a ainsi diminué l'exposant du dénominateur dans l'élément souligné restant à intégrer : une récurrence finie ramène à l'intégrale canonique $\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$.

**Exemples 30.** *A titre d'entrainement le lecteur pourra vérifier que :*

*i.* $\displaystyle\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{2}\arctan u + C$ ;

*ii.* $\displaystyle\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\frac{u}{\left(u^2+1\right)^2} + \frac{3}{8}\frac{u}{u^2+1} + \frac{3}{8}\arctan u + C.$

### 5.3.3. Exemples

On va reprendre les exemples 27 et 28.

**Primitives de la fonction définie dans l'exemple 27.** Rappelons que

$$\begin{aligned}\frac{x^4+2x-1}{x^3-1} &= x + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{3}\frac{2x-5}{x^2+x+1},\\ &= x + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2\frac{1}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{x^4+2x-1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln\left(x^2+x+1\right) + 2\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

On a

$$\begin{aligned}2\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = 8\int \frac{1}{(2x+1)^2+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \text{ (On pose } u=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\text{)},\\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{x^4+2x-1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

**Primitives de la fonction définie dans l'exemple 28** On a

$$\frac{x^3+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{4(x-1)^2} + \frac{3}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x+1)^2}.$$

D'où

$$\int \frac{x^3+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{3}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + C.$$

*Le lecteur trouvera d'autres exemples dans la suite du document.*

### 5.4. Calcul d'intégrales définies

Soit $P/Q$ une fraction rationnelle. On peut calculer toute intégrale définie $\int_a^b P(x)/Q(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque l'intervalle $[a,b]$ ne contient pas de pôle de $Q$. On dispose des deux méthodes déjà évoquées dans la section 3 :

*i*. on détermine une primitive de la fonction sous le signe somme (sans se préoccuper des bornes) et on achève le calcul en utilisant la formule fondamentale :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b\ ,$$

où $F$ est la primitive calculée de la fonction sous le signe ‹‹ $\int$ ›› c'est-à-dire $F = G\circ\varphi^{-1}$ ;

*ii*. on effectue les changementsde bornes convenables dans l'intégrale au fil du calcul

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [G(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}$$

où $G$ est la primitive calculée de la fonction $t\mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

**Exemple 31.** *Soit à calculer* $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^6+9x^4}{x^4+8x^2-4x^3-16x+16}\,\mathrm{d}x.$

*On effectue d'abord la division euclidienne de* $P(x)=x^6+9x^4$ *par* $Q(x)=x^4+8x^2-4x^3-16x+16$. *On obtient*

$$x^6+9x^4 = \left(x^2+4x+17\right)\left(x^4+8x^2-4x^3-16x+16\right) + \underbrace{52x^3-88x^2+208x-272}_{R(x)}.$$

*On remarque que 2 est racine de Q. D'où*

$$x^4+8x^2-4x^3-16x+16 = (x-2)^2\left(x^2+4\right).$$

*On écrit la décomposition théorique de* $R(x)/Q(x)$, *soit*

$$\frac{52x^3-88x^2+208x-272}{x^4+8x^2-4x^3-16x+16} = \frac{a}{x\ -2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+4}.$$

*Par identification, on obtient* $a=47$, $b=26$, $c=5$, $d=0$ *soit finalement*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2+4x+17 + \frac{47}{x\ -2} + \frac{26}{(x-2)^2} + 5\frac{x}{x^2+4}.$$

*D'où*

$$\int_{-1}^{1}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(x^2+4x+17\right)\,\mathrm{d}x$$
$$+47\int_{-1}^{1}\frac{1}{x\ -2}\,\mathrm{d}x + 26\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x + 5\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

*Puis*

$$\int_{-1}^{1}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+2x^2+17x\right]_{-1}^{1} + 47\left[\ln(2-x)\ \right]_{-1}^{1} - 26\left[\frac{1}{x-2}\right]_{-1}^{1},$$
$$= 104/3 + 47\ln(1/3) + 52/3 = 52 - 47\ln(3).$$

## 6. INTEGRATION des fonctions rationnelles TRIGONOMETRIQUES et HYPERBOLIQUES

### 6.1. Les polynômes trigonométriques

On appelle fonction polynôme trigonométrique toute fonction s'écrivant

$$f(x) = \sum_{finie} a_{m,n} \cos^m x \sin^n x \quad a_{m,n} \text{ constantes réelles.} \tag{6.1}$$

En raison des propriétés de linéarité, il suffit de savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \cos^m x \sin^n x$ pour déterminer les primitives de $f$.

#### 6.1.1. Calcul des primitives de $x \mapsto \cos^m x \sin^n x$, avec l'un au moins des entiers $m$ ou $n$ impair(s)

*i*. Si $m$ est impair, on pose $m = 2p + 1$. On a alors

$$\begin{aligned}\int \cos^m x \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int \cos^{2p+1} x \sin^n x \, \mathrm{d}x &= \int \cos^{2p} \sin^n x \cos x \, \mathrm{d}x, \\ &= \int \left(1 - \sin^2 x\right)^p \sin^n x \cos x \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On pose alors $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$, ce qui ramène au calcul d'une primitive de fonction polynomiale.

*ii*. Si $n$ est impair, on pose alors $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$. On est également ramené au calcul d'une primitive de fonction polynomiale.

**Remarque 12.** *Ce procédé s'étend au cas ou l'un des deux entiers $m$ ou $n$ est nul, l'autre étant alors impair.*

**Exemples 32.**

*i. Considérons $\int \cos^3 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$. On a*

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int \left(1 - t^2\right) t^2 \, \mathrm{d}t \ \text{ avec } t = \sin x, \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.\end{aligned}$$

*ii. Considérons $\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x$. On a*

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x &= \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \, \mathrm{d}x = \int \left(1 - t^2\right)^2 \, \mathrm{d}t \ \text{ avec } t = \sin x, \\ &= t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + C = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.\end{aligned}$$

*iii. Considérons $\int \cos^2 x \sin^3 \, \mathrm{d}x$. On a*

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin^3 x \, \mathrm{d}x &= \int \cos^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) \sin x \, \mathrm{d}x, \\ &= -\int t^2 \left(1 - t^2\right) \, \mathrm{d}t \ \text{ avec } t = \cos x, \ \mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x, \\ &= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C.\end{aligned}$$

*iv.* $\int \cos^3 x \sin^3 \mathrm{d}x$. *Les deux exposants étant impairs, on peut indifférement poser* $t = \sin x$ *ou* $t = \cos x$. *Le lecteur vérifiera que l'on obtient par les deux méthodes*

$$\int \cos^3 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C,$$
$$= -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C'.$$

### 6.1.2. Calcul des primitives de $x \mapsto \cos^m x \sin^n x$, $m$ et $n$ pairs

On exprime la fonction dont on cherche les primitives sous la forme de $\cos x$ ou de $\sin x$ seuls. On est ramené à calculer des primitives du type $\int \cos^{2p} x \,\mathrm{d}x$ ou $\int \sin^{2q} x \,\mathrm{d}x$. Pour ce faire, on linéarise la fonction à intégrer en utilisant les formules d'Euler

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}.$$

**Exemples 33.**
*i. Considérons* $\displaystyle\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x$. *On a*

$$\cos^4 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\mathrm{e}^{4ix} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2ix} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2ix} + \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-4ix},$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

*D'où*

$$\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C.$$

*ii. Considérons* $\displaystyle\int \cos^2 x \sin^4 x \,\mathrm{d}x$. *On a*

$$\cos^2 x \sin^4 x = \left(1 - \sin^2 x\right)\sin^4 x = \sin^4 x - \sin^6 x.$$

*Or*

$$\sin^4 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\mathrm{e}^{4ix} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2ix} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2ix} + \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-4ix}$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8};$$
$$\sin^6 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^6 = -\frac{1}{64}\mathrm{e}^{6ix} + \frac{3}{32}\mathrm{e}^{4ix} - \frac{15}{64}\mathrm{e}^{2ix} + \frac{5}{16} - \frac{15}{64}\mathrm{e}^{-2ix} + \frac{3}{32}\mathrm{e}^{-4ix} - \frac{1}{64}\mathrm{e}^{-6ix},$$
$$= -\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}.$$

*D'où*

$$\int \cos^2 x \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{32}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 2x + \frac{1}{16}\right)\mathrm{d}x,$$
$$= -\frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{16}x + \frac{1}{192}\sin 6x + C.$$

### 6.2. Les fractions rationnelles trigonométriques

Il s'agit des expressions du type $f(\cos x, \sin x)$ ou $f$ est le quotient de deux fonctions polynômes trigonométriques, définies par 6.1, soit

$$f(x) = \frac{\sum_{finie} a_{m,n} \cos^m x \sin^n x}{\sum_{finie} b_{p,q} \cos^p x \sin^q x} \qquad a_{m,n},\ b_{p,q} \text{ constantes réelles.}$$

#### 6.2.1. Méthode générale

On rappelle que

$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} \quad \cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} \quad \tan x = \frac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)}.$$

On va donc ramener la recherche d'une primitive de $f$ à celle d'une fraction rationnelle en $t$ en posant

$$t = \tan(x/2), \quad x = 2\arctan t \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

**Exemple 34.** *Considérons* $\int \frac{\sin x - 1}{\cos x - 1}\mathrm{d}x$*. La fonction sous le signe intégral est définie sur les intervalles* $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$*,* $k$ *décrivant* $\mathbb{Z}$*). On cherche donc une primitive sur un de ces intervalles. On a*

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x - 1}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} - 1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2(1+t^2)}\mathrm{d}t, \text{ avec } t = \tan(x/2).$$

*D'après le théorème 5.5, on a*

$$\frac{t^2-2t+1}{t^2(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}.$$

*Par identification des deux membres, on trouve* $a = -2,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 0$*. D'où*

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2-2t+1}{t^2(1+t^2)}\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2\frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t &= -\frac{1}{t} - 2\ln|t| + \ln\left(1+t^2\right) + C \\ &= -\frac{1}{t} + \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) + C.\end{aligned}$$

*D'où*

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x - 1}\mathrm{d}x = -\cot(x/2) + \ln(1+\cot^2(x/2)) + C.$$

**Exemple 35.** *Considérons* $\int \frac{\tan x - 1}{\cot x - 1}\mathrm{d}x$*. La fonction sous le signe ‹‹* $\int$ *›› est définie sur les intervalles* $]\pi/4 + k\pi, 5\pi/4 + (k+1)\pi[$*,* $k$ *décrivant* $\mathbb{Z}$*. On cherche donc une primitive sur un de ces intervalles. On a*

$$\int \frac{\tan x - 1}{\cot x - 1}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2t}{1-t^2} - 1}{\frac{1-t^2}{2t} - 1}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{4t}{(1+t^2)(t^2-1)}\mathrm{d}t, \text{ avec } t = \tan(x/2).$$

*D'après le théorème 5.5, on a*

$$\frac{4t}{(1+t^2)(t^2-1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} - \frac{ct+d}{1+t^2}.$$

*Par identification des deux membres, on trouve* $a=1,\ b=1,\ c=2,\ d=0$. *D'où*

$$\int \frac{4t}{(1+t^2)(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}-\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{2t}{t^2-1}-\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t,$$
$$= \ln\left|t^2-1\right| - \ln\left(1+t^2\right) + C = \ln\frac{\left|t^2-1\right|}{1+t^2}+C.$$

*D'où*

$$\int \frac{\tan x - 1}{\cot x - 1}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{\left|\tan^2(x/2)-1\right|}{\tan^2(x/2)+1}+C.$$

*Comme* $|\tan(x/2)| < 1$ *si et seulement si* $x \in \left]-\pi/2+2p\pi, \pi/2+(2p+1)\pi\right[$, *on peut peut préciser*

$$\int \frac{\tan x - 1}{\cot x - 1}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{1-\tan^2(x/2)}{\tan^2(x/2)+1}+C, \text{ sur } \left]-\pi/2+2p\pi, \pi/2+2p\pi\right[,$$
$$\int \frac{\tan x - 1}{\cot x - 1}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{\tan^2(x/2)-1}{\tan^2(x/2)+1}+C, \text{ sur } \left]-\pi+2p\pi, -\pi/2+2p\pi\right[ \text{ et } \left]\pi/2+2p\pi, \pi+2p\pi\right[.$$

### 6.2.2. Méthodes particulières

En première approche, il n'est pas utile de connaître ces méthodes, bien que souvent elles simplifient les calculs.
Elles sont basées sur des invariances par changement de variable particuliers de l'élément différentiel $f(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ :
*i*. si l'élément différentiel est invariant par le changement $y=-x$, on pose $t=\cos x$,
*ii*. si l'élément différentiel est invariant par le changement $y=\pi-x$, on pose $t=\sin x$,
*iii*. si l'élément différentiel est invariant par le changement $y=\pi+x$, on pose $t=\tan x$.

**Exemple 36.** *Considérons* $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$. *L'élément différentiel est invariant dans le changement* $y=-x$ *: on a* $(\sin(-x)=-\sin x,\ \mathrm{d}(-x)=-\mathrm{d}x,\ \cos(-x)=-\cos x$. *On pose donc* $t=\cos x$ *avec* $\mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$. *D'où*

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\ln|1+t|+C = -\ln(1+\cos x)+C.$$

**Remarque 13.** *La méthode générale, exposée au paragraphe 6.2.1, donne ici les calculs suivants,*

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int 2\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \ln\left(1+t^2\right)+C',$$
$$= \ln\left(1+\tan^2(x/2)\right)+C'.$$

*Or* $1+\tan^2(x/2) = 1/\cos^2(x/2)$. *D'où*

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(\cos^2(x/2)\right)+C' = -\ln\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)+C' = -\ln(1+\cos x)+\ln 2+C'.$$

*Le calcul est donc légérement plus long. On constate qu'il donne une constante d'intégration différente.*

**Exemple 37.** *Considérons* $\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. *L'élément différentiel est invariant dans le changement* $y=\pi-x$ *: on a* $(\cos(\pi-x)=-\cos x,\ \mathrm{d}(\pi-x)=-\mathrm{d}x$. *On pose donc* $t=\sin x$ *avec* $\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. *D'où*

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{2-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

*On a* $\dfrac{1}{2-t^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}+t} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}-t}$. *(On procède par identification.) D'où*

$$\int \frac{1}{2-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+t\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}-t\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + C.$$

*D'où*

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x} + C.$$

**Exemple 38.** *Considérons* $\displaystyle\int \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. *L'élément différentiel est invariant dans le changement* $y = \pi + x$. *On pose donc* $t = \tan x$ *avec* $\mathrm{d}t = \left(1+\tan^2 x\right)\,\mathrm{d}x$. *D'où*

$$\int \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x}{1-\tan^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{(1-t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

*On a*

$$\frac{t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{4}\frac{2t}{1-t^2} + \frac{1}{4}\frac{2t}{1+t^2}.$$

*(On procède par identification.) D'où*

$$\int \frac{t}{(1-t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\ln\left|1-t^2\right| + t^2 + \frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+t^2}{|1-t^2|} + C.$$

*(Les valeurs absolues sont ici inutiles, car* $t \in [-1,1]$.*) D'où*

$$\int \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\tan^2 x}{|1-\tan^2 x|} + C.$$

### 6.3. Les intégrales du type $\int \sin px \cos qx\,\mathrm{d}x$, $\int \sin px \sin qx\,\mathrm{d}x$, $\int \cos px \cos qx\,\mathrm{d}x$

On transforme les produits en somme, en utilisant les formules

$$\begin{aligned}
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right),\\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right),\\
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).
\end{aligned}$$

**Exemples 39.**
*i. Soit à calculer* $\int \sin 2x \cos 3x\,\mathrm{d}x$. *On a*

$$\int \sin 2x \cos 3x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\sin 5x - \sin x\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

*ii. Soit à calculer* $\int \sin 2x \cos 2x \cos 3x\,\mathrm{d}x$. *On a*

$$\begin{aligned}
\sin x \sin 2x \cos 3x &= \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos 3x\right)\cos 3x = \frac{1}{2}\left(\cos x \cos 3x - \cos^2 3x\right),\\
\sin x \sin 2x \cos 3x &= \frac{1}{4}\left(\cos 4x + \cos 2x - \cos 6x - 1\right).
\end{aligned}$$

*D'où*

$$\begin{aligned}
\int \sin x \sin 2x \cos 3x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \left(\cos 4x + \cos 2x - \cos 6x - 1\right)\,\mathrm{d}x,\\
&= \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 6x - \frac{1}{4}x + C.
\end{aligned}$$

### 6.4. Les fonctions rationnelles hyperboliques

Il s'agit des expressions du type $f(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ ou $f$ est le quotient de deux fonctions polynômes hyperboliques, soit

$$f(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) = \frac{\sum_{finie} a_{m,n} \operatorname{ch}^m x \operatorname{sh}^n x}{\sum_{finie} b_{p,q} \operatorname{ch}^p x \operatorname{sh}^q x} \quad a_{m,n},\ b_{p,q} \text{ constantes réelles.}$$

On procède par changement de variable

#### 6.4.1. Méthode générale

On se ramène à une fraction rationnelle en $t$ en effectuant le changement de variables $t = \mathrm{e}^x$, avec $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$. Au préalable, on transforme l'expression donnée, en utilisant

$$\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Cette méthode efficace n'est cependant rarement la plus rapide.

**Exemple 40.** *Soit à déterminer* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}\, \mathrm{d}x$. *On a*

$$\int \frac{\operatorname{sh} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 2}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 2}\, \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x.$$

*On pose* $t = \mathrm{e}^x$, *avec* $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$. *D'où*

$$\int \frac{\operatorname{sh} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1 - t^{-2} - 2t^{-1}}{t + t^{-1} + 2}\, \mathrm{d}t = \int \frac{t^2 - 2t - 1}{t\,(t+1)^2}\, \mathrm{d}t.$$

*Or* $\displaystyle\frac{t^2 - 2t - 1}{t\,(t+1)^2} = -\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2}$. *D'où*

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sh} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}\, \mathrm{d}x &= \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2}\right) \mathrm{d}t = -\ln|t| + \frac{2}{t+1} + 2\ln(t+1) + C,\\ &= -x + \frac{2}{1+\mathrm{e}^x} + 2\ln(1+\mathrm{e}^x) + C.\end{aligned}$$

#### 6.4.2. Méthodes particulières

On cherche à déterminer comme ci-dessus $\int f(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\, \mathrm{d}x$. Ces méthodes sont basées sur les invariances par changement de variable particuliers de l'élément différentiel $f(\cos x, \sin x)\, \mathrm{d}x$ vues au paragraphe 6.2.2 pour les fonctions rationnelles trigonométriques :
*i.* si l'élément différentiel est invariant par le changement $y = -x$, on pose $t = \operatorname{ch} x$,
*ii.* si l'élément différentiel est invariant par le changement $y = \pi - x$, on pose $t = \operatorname{sh} x$,
*iii.* si l'élément différentiel est invariant par le changement $y = \pi + x$, on pose $t = \tanh x$.

**Exemple 41.** *Considérons* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}\, \mathrm{d}x$. *L'élément différentiel* $\displaystyle\frac{\sin x}{1 + \cos x}\, \mathrm{d}x$ *repris de l'exemple 36 est invariant dans le changement* $y = -x$. *On pose donc* $t = \operatorname{ch} x$ *avec* $\mathrm{d}t = \operatorname{sh} x\, \mathrm{d}x$. *D'où*

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\, \mathrm{d}t = -\ln(1+t) + C = \ln(1 + \operatorname{ch} x) + C.$$

*(Les valeurs absolues sont inutiles car la fonction* ch *est à valeurs positives.)*

**Exemple 42.** *Considérons* $\int \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x$*. L'élément différentiel* $\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ *repris de l'exemple 37 est invariant par le changement* $y = \pi - x$*. On pose donc* $t = \operatorname{sh} x$ *avec* $\mathrm{d}t = \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x$*. D'où*

$$\int \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch} x}{2+\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

*En posant* $\sqrt{2}u = t$ *avec* $\sqrt{2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$*, on a*

$$\int \frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan u + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}t + C.$$

*D'où*

$$\int \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh} x\right) + C.$$

**Exemple 43.** *Considérons* $\int \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x$*. L'élément différentiel* $\frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ *est invariant dans le changement* $y = \pi + x$*. On pose donc* $t = \tanh x$ *avec* $\mathrm{d}t = \left(1 - \tanh^2 x\right)\mathrm{d}x$*. D'où*

$$\int \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tanh x}{1+\tanh^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{(1+t^2)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

*On a (cf. exemple 38)*

$$\frac{t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{4}\frac{2t}{1-t^2} + \frac{1}{4}\frac{2t}{1+t^2}.$$

*D'où*

$$\int \frac{t}{(1-t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\ln\left|1-t^2\right| + t^2 + \frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+t^2}{|1-t^2|} + C.$$

*Puis*

$$\int \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\tanh^2 x}{\left|1-\tanh^2 x\right|} + C.$$




**PLC1-Mathématiques**
**Auteur : A. Delcroix**

# Suites et séries de fonctions

## 1. Introduction

### 1.1. Suites et séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. Par définition, la série $\sum u_n$ converge, si et seulement si, la suite de ses sommes partielles $(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ainsi, l'étude de la convergence d'une série revient à celle d'une suite. Réciproquement, étant donnée une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes, on introduit la suite $(u_n = v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série de terme général $\sum u_n$. Ses sommes partielles sont égales à $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n = v_{n+1} - v_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge[1].

Cette remarque indique que l'étude des suites et des séries peuvent être menées, au moins en théorie, en parallèle. C'est pour cela que ce document commence par des généralités sur les suites de fonctions, puis ce poursuit par des généralités sur les séries de fonctions. Ensuite seront abordées deux types de séries très importants, les séries entières et les séries de Fourier.

### 1.2. Notations générales

On considère dans la suite un espace vectoriel normé complet (espace de Banach) $E$ dont on note la norme $\|\cdot\|$. Les fonctions considérées seront définies sur une partie $D$ de $E$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dans la plupart des cas $E$ sera $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$, pour les séries entières, section 4) et $D$ un intervalle réel (resp. un sous-ensemble ouvert $\mathbb{C}$).

On notera :
*(i)* $\mathcal{F}(D,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^D$, la $\mathbb{K}$-algèbre des fonctions définies sur $D$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
*(ii)* $\mathcal{B}(D,\mathbb{K})$, la $\mathbb{K}$-algèbre des fonctions bornées sur $D$,
*(iii)* Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{C}^k(D,\mathbb{K})$, la $\mathbb{K}$-algèbre des fonctions $k$ fois continûment dérivables sur $D$ et $\mathrm{C}^\infty(D,\mathbb{K})$ celle des fonctions indéfiniment dérivable sur $D$. ($D$ est alors soit un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.)

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble d'arrivée, on notera plus simplement

$$\mathcal{F}(D) = \mathcal{F}(D,\mathbb{K}), \quad \mathcal{B}(D) = \mathcal{B}(D,\mathbb{K}), \quad \mathrm{C}^k(D) = \mathrm{C}^k(D,\mathbb{K}) \quad (k \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{+\infty\}).$$

On définit une application $\|\cdot\|_{D,\infty} : \mathcal{B}(D,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}_+$ par

$$\forall f \in \mathcal{B}(D,\mathbb{K}), \quad \|f\|_{D,\infty} = \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

L'application $\|\cdot\|_{D,\infty}$ définit une norme sur $\mathcal{B}(D,\mathbb{K})$.

**Exemple 1.1.** *En particulier si $D$ est un intervalle $I$ compact de $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{C}^0(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ et l'application $\|\cdot\|_{I,\infty}$, restreinte à $I$, définit une norme sur $\mathrm{C}^0(I,\mathbb{K})$.*

## 2. Suites de fonctions

On rappelle qu'étant donnée une partie $D$ de $E$, l'ensemble $\mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ des suites de fonctions définies sur $D$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre lorsqu'il est muni des trois opérations suivantes :

- *l'addition.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} + (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $f_n + g_n$,

[1] Cette astuce est en particulier utilisée lorsqu'on connait le comportement asymptotique de la suite $(u_n = v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- *la multiplication externe (ou bien multiplication par un scalaire).* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. La suite $\lambda (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $\lambda f_n$.
- *la multiplication.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $f_n g_n$.

### 2.1. Définitions et exemples

#### 2.1.1. Convergence simple, compacte, uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

**Définition 2.1.** *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge simplement *(ou bien* est simplement convergente*) si, pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ (à valeurs dans $\mathbb{K}$) est convergente.*

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement si

$$\forall x \in D,\ \exists l \in \mathbb{K},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - l| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente, l'unicité de la limite permet de définir une fonction $f \in F(D,\mathbb{K})$ par

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

La fonction $f$ s'appelle *la limite* de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, lorsqu'il faut préciser, la *limite simple*.

Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ sera dite divergente s'il existe $x \in D$ tel que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est divergente.

**Définition 2.2.** *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge uniformément *(ou bien* est uniformément convergente, est uniformément convergente sur *$D$, s'il y a lieu de préciser) si, il existe une fonction $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})$ telle que la suite $\left(\|f_n - f\|_{D,\infty}\right)_n$ converge vers $0$.*

On vérifie facilement que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in D, \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

On dit que $f$ est la *limite uniforme* de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La comparaison des relations (2.1) et (2.2) montre immédiatement le lemme suivant. (Comparez la place des expressions quantifiées "$\exists n_0 \in \mathbb{N}$" et "$\forall x \in D$".)

**Lemme 2.3.** *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f$.*

Ainsi, lorsque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, sa limite uniforme est égale à sa limite simple. Autrement dit, si on dispose de la limite simple $f$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la seule limite uniforme possible est également $f$. Ainsi, l'étude de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , se ramène à celle de $\|f_n - f\|_{D,\infty}$.

**Remarque 2.4.** *Il est immédiat que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $D$, elle converge uniformément sur tout sous-ensemble de $D$.*

La réciproque est évidemment fausse (voir exemples 2.1 et 2.2). Dans la pratique, on utilise souvent la notion suivante.

**Définition 2.5.** *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge compactement *(ou bien* est compactement convergente*) vers la fonction $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})$ si, pour tout ensemble compact $K$ inclus dans $D$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $K$ vers $f$.*

**Remarques 2.6.**
*(i) Comme tout point est un ensemble compact, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge compactement vers $f$, elle converge simplement vers $f$.*
*(ii) Lorsque $D$ est lui même compact, la notion de convergence compacte n'a pas d'intérêt. (Convergence compacte et uniforme sont la même notion, $D$ étant un compact de $D$.)*

On résume le lemme 2.3 et le *(i)* des remarques 2.6 dans le schéma :

$$CU \Longrightarrow CC \Longrightarrow CS. \tag{2.3}$$

On va construire des exemples montrant que les autres implications possibles sont fausses.

**Exemple 2.1.** *Soit $D = [0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.*
*(i) On a*

$$\forall x \in [0,1[\,, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0\ , \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1.$$

*Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f$ définie par $f_{|[0,1[} = 0$ et $f(1) = 1$.*
*(ii) Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (1 - 1/n) \in [0,1[$. On a $f_n(x_n) = (1-1/n)^n = \exp n \ln(1-1/n)$. D'où $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 1/\mathrm{e}$. Or*

$$\|f_n - f\|_{[0,1],\infty} \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|\,.$$

*On a $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 1/\mathrm{e} > 0$. Donc la suite $\left(\|f_n - f\|_{[0,1],\infty}\right)_n$ ne converge pas vers 0. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément (ni compactement) sur $[0,1]$. Ainsi $CS \not\Rightarrow CC$.*

**Exemple 2.2.** *Soit $D = [0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : D \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = x^n$. D'après le (i) de l'exemple 2.1, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $g$ définie par $g_{|[0,1[} = 0$.*
*(i) Montrons que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge compactement sur $[0,1[$. Soit $K$ un compact de $[0,1[$. Comme $K$ est borné, il existe en particulier $b \in [0,1[$ tel que $K \subset [0,b]$. On a*

$$|g_n(x) - g(x)| = x^n \leq b^n,$$

*avec $\lim_{n\to+\infty} b^n = 0$ puisque $0 \leq b < 1$. Donc la suite $\left(\|g_n - g\|_{[0,b],\infty}\right)_n$ converge vers 0. Ainsi, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,b]$. La convergence compacte sur $[0,1[$ est montrée.*
*(ii) Vérifions que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$. En reprenant le (ii) de l'exemple 2.1, on a $\lim_{n\to+\infty} |g_n(x_n) - g(x_n)| > 0$. (On rappelle ici, c'est fondamental, que les $x_n$ sont des points de l'intervalle $[0,1[$.) Ainsi la suite $\left(\|g_n - g\|_{[0,1[,\infty}\right)_n$ ne converge pas vers 0. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément sur $[0,1[$. Ainsi $CC \not\Rightarrow CU$.*

**Remarque 2.7.** *La méthode employée pour montrer la non convergence uniforme dans les (ii) des exemples 2.1 et 2.2 est à retenir. La sous-section 2.2 qui suit, montrera des possibilités indirectes.*

**Exercice 1.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(D)^{\mathbb{N}}$, ($D \subset \mathbb{R}^d$). On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. Montrer que la limite de $f$ est une fonction bornée. Cette propriété reste-t-elle vraie si l'on remplace la convergence uniforme par la convergence compacte, la convergence simple ?*

### 2.1.2. Critères de Cauchy

On rappelle qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ satisfait le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Comme $\mathbb{K}$ est complet, un suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy est convergente.
Soit donc une $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D)^{\mathbb{N}}$, telle que, pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente.

**Définition 2.8.** *On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D)^{\mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $D$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \forall x \in D, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Le critère (2.4) est équivalent à la formulation suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \qquad n \geq n_0 \Longrightarrow \|f_{n+p} - f_n\|_{D,\infty} < \varepsilon.$$

Cette formulation indique que, lorsque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(D)^{\mathbb{N}}$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $D$ si, et seulement si, elle est de Cauchy, en tant que suite de l'espace $\mathcal{F}(D)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{D,\infty}$.

On a immédiatement :

**Lemme 2.9.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D)^{\mathbb{N}}$ une suite uniformément convergente sur $D$. Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D)^{\mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $D$.*

La démonstration se fait de manière identique à celle prouvant qu'une suite convergente complexe satisfait le critère de Cauchy. En fait, l'introduction de la notion de critère de Cauchy uniforme est justifiée par la réciproque :

**Proposition 2.10.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D)^{\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant le critère de Cauchy uniforme sur $D$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $D$.*

**Preuve**.
On va prouver ce résultat de deux façons.
*(a) Un jeu sur les définitions quantifiées (Un peu lourd, mais très explicite)*.- Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D)^{\mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $D$, pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc, d'après une remarque ci-dessus, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente, vers une fonction $f \in \mathcal{F}(D)$. Montrons sa convergence uniforme sur $D$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in D, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2. \tag{2.5}$$

Comme, pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, il existe $m_0(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$q \geq m_0(x) \Longrightarrow |f_q(x) - f(x)| < \varepsilon/2. \tag{2.6}$$

Soit $n \geq n_0$ et $x \in D$. On a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \left|f_n(x) - f_{n+m_0(x)}(x)\right| + \left|f_{n+m_0(x)}(x) - f(x)\right|.$$

Or $\left|f_n(x) - f_{n+m_0(x)}(x)\right| < \varepsilon/2$, d'après (2.5) et $\left|f_{n+m_0(x)}(x) - f(x)\right|$, d'après (2.6) (on a, en effet, $n + m_0(x) \geq m_0(x)$). D'où $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. On a donc

$$\forall x \in D, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

*(b) Une démonstration plus élégante*.- Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in D, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Soit $n \geq n_0$ et $x \in D$. Comme la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on a en particulier $\lim_{p\to+\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$ et, par continuité de la valeur absolue,

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{p\to+\infty} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\forall x \in D, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui suffit pour affirmer la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $D$.

### 2.2. Théorèmes généraux

La convergence simple d'une suite ne préserve pas certaines propriétés des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le passage à la limite. Ainsi, dans l'exemple 2.1, chaque fonction $f_n$ est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, alors que la limite $f$ est une fonction discontinue.
Les théorèmes suivants montrent que la convergence uniforme préserve, à l'inverse, certaines propriétés de régularité.

**Théorème 2.11.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}^0(I)^{\mathbb{N}}$, où $I$ est un intervalle réel. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (resp. compactement) sur $I$ vers $f$. Alors $f$ est continue sur $I$.*

**Preuve**.
*(a)* Nous effectuons d'abord la preuve pour le cas d'un point intérieur de $I$. Soit $a$ un tel point et $J$ un intervalle ouvert et borné[2], tel que $a \in J \subset \overline{J} \subset I$. Comme $\overline{J}$ est fermé borné, il est compact. Sous l'hypothèse de convergence uniforme sur $I$, comme sous l'hypothèse de convergence compacte, la suite

[2] Cet intervalle est donc *relativement compact*.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\overline{J}$, donc sur $J$ (On emploie ici la remarque 2.4.) Montrons que $f$ est continue en $a$. Soit $\varepsilon > 0$. Avec la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $J$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in J, \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon/3. \tag{2.8}$$

En particulier, pour $n_0$, on a : $\forall \xi \in J, \quad |f_{n_0}(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon/3$. Comme $f_{n_0}$ est continue en $x_0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in J, \quad |x-a| < \eta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon/3. \tag{2.9}$$

En utilisant 2 fois l'inégalité triangulaire, il vient

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)|$$

puis

$$\forall x \in J, \quad |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

*(b)* Pour le cas d'un intervalle $I$ non ouvert, la preuve précédente s'adapte facilement. On peut, par exemple, traiter le cas de $I = [a, b)$, avec $b \in ]a, +\infty]$ et $) =]$ ou $) = [$. Il existe alors un intervalle $J = [a, c[ \subset I$. On démontre alors la continuité à droite de $f$ en $a$ par une technique identique à celle ci-dessus.□

**Remarque 2.12.** *Il est d'usage d'insister sur les hypothèses. Si la convergence n'est pas compacte (donc non uniforme), on ne peut en général rien affirmer sur la continuité de la limite $f$.*
*Ainsi, dans l'exemple 2.1, la convergence de la suite n'est pas uniforme (ni compacte) et la limite présente une discontinuité.*

**Théorème 2.13.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}([a, b])^{\mathbb{N}}$. On suppose chaque $f_n$ Riemann intégrable sur $[a, b]$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f$. Alors $f$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$, la suite $\left(n \mapsto \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Preuve**.
*(a) Riemann intégrabilité de $f$.* Il est d'abord clair que $f$, limite uniforme de fonctions bornées est bornée, ce qui donne un sens à l'étude de sa Riemann intégrabilité (voir l'exercice 1). Pour une fonction $g$ bornée sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathcal{S}_{[ab]}$, ensemble des subdivisions de $[a, b]$, rappelons que l'on appelle *somme de Darboux inférieure* (resp. *supérieure*) relative à $g$ et $\sigma$, la quantité notée $s(g, \sigma)$ (resp. $S(g, \sigma)$) définie par

$$s(g, \sigma) = \textstyle\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i(g, \sigma) \qquad (\text{resp. } S(g, \sigma) = \textstyle\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i(g, \sigma)),$$

avec $m_i(g, \sigma) := \inf_{\xi\in[x_{i-1}, x_i]} g(\xi)$ (resp. $M_i(g, \sigma) := \sup_{\xi\in[x_{i-1}, x_i]} g(\xi)$.). De manière claire, on a $s(g, \sigma) \leq S(g, \sigma)$. On démontre que $g$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \sigma \in \mathcal{S}_{[ab]}, \quad S(g, \sigma) - s(g, \sigma) < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Avec les hypothèses du théorème, considérons $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow \|f_{n_0} - f\|_{[ab],\infty} \leq \varepsilon / (3(b-a)). \tag{2.11}$$

D'après le critère (2.10), il existe $\sigma \in \mathcal{S}_{[ab]}$ telle que

$$S(f_{n_0}, \sigma) - s(f_{n_0}, \sigma) < \varepsilon/3,$$

puisque $f_{n_0}$ est par hypothèse Riemann intégrable.
On a alors $|M_i(f, \sigma) - M_i(f_{n_0}, \sigma)| \leq \|f_{n_0} - f\|_{[ab],\infty} (x_i - x_{i-1})$ et

$$|S(f, \sigma) - S(f_{n_0}, \sigma)| \leq \textstyle\sum_{i=1}^n \|f_{n_0} - f\|_{[ab],\infty} (x_i - x_{i-1}) \leq \|f_{n_0} - f\|_{[ab],\infty} (b-a) < \varepsilon/3.$$

De même, on obtient $|s(f, \sigma) - s(f_{n_0}, \sigma)| < \varepsilon/3$. D'où

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) \leq |S(f, \sigma) - S(f_{n_0}, \sigma)| + S(f_{n_0}, \sigma) - s(f_{n_0}, \sigma) + |s(f, \sigma) - s(f_{n_0}, \sigma)| < \varepsilon.$$

*(b)* Comme $f$ est intégrable, on peut considérer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et lui appliquer les théorèmes usuels. Soit $n \geq n_0$. On a, en utilisant (2.11),

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

D'où les deux dernières assertions du théorème.□

**Théorème 2.14.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}^1(I)^{\mathbb{N}}$, où $I$ est un intervalle réel. On suppose que :*
*(i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $I$ vers $f$,*
*(ii) la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (resp. compactement) sur $I$ vers $g$.*
*Alors $f$ est continûment dérivable sur $I$, avec $f' = g$.*

On va démontrer en fait le résultat suivant, légérement plus général.

**Proposition 2.15.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}^1(I)^{\mathbb{N}}$, où $I$ est un intervalle réel. On suppose que :*
*(i) il existe $a \in I$ tel que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers $l$),*
*(ii) la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (resp. compactement) sur $I$ vers $g \in \mathrm{C}^0(I)^{\mathbb{N}}$.*
*Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $I$ et sa limite simple $f$ est une fonction continûment dérivable sur $I$, avec $f' = g$.*
*De plus, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout ensemble borné de $I$.*

**Preuve**. Le théorème 2.11 entraîne que la limite de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue, ce qui justifie la formulation du *(ii)* de la proposition 2.15.
*(a) Preuve de la proposition 2.15.* Soit $x \in I$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t = f_n(a) + \int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.12}$$

Comme la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée de fonctions continues et converge compactement vers $g$, elle converge uniformément vers $g$ sur $[a, x]$. Le théorème 2.13 entraine que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Comme la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$, le membre de droite de (2.12) converge, vers un élement de $\mathbb{K}$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $I$ et sa limite simple $f$ vérifie

$$\forall x \in I, \quad f(x) = l + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.13}$$

Comme la fonction $g$ est continue sur $I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $I$. Ainsi $f$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $I$. De plus, le théorème fondamental du calcul intégral montre que $f' = g$.
Enfin, soit $B$ un ensemble borné de $I$. Il existe un intervelle $J \subset I$ fermé borné tel que $B \cup \{a\} \subset J$. En utilisant (2.12) et (2.13), on a, pour tout $x \in B$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |l - f_n(a)| + \int_a^x |g_n(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \leq |l - f_n(a)| + l(J)\,\|g_n - g\|_{J,\infty},$$

où $l(J)$ est la longueur (finie) de l'intervalle borné $J$. D'où

$$\|f_n - f\|_{B,\infty} \leq |l - f_n(a)| + l(J)\,\|g_n - g\|_{J,\infty}.$$

Comme la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le compact $J$ et que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$, on a $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{B,\infty} = 0$, et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur le borné $B$.
*(b) Preuve du théorème 2.14.* Le *(i)* du théorème 2.14 entraîne le *(i)* de la proposition 2.15.□

Une récurrence relativement immédiate permet de montrer le résultat suivant.

**Théorème 2.16.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}^\infty(I)^{\mathbb{N}}$, où $I$ est un intervalle réel. On suppose que :*
*(i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $I$ vers $f$,*
*(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (resp. compactement) sur $I$ vers une fonction $g^p$.*
*Alors $f$ est indéfiniment dérivable sur $I$, avec $f^{(p)} = g^p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

**Exercice 2.** *Démontrer le théorème 2.16.*

## 3. Généralités sur les séries de fonctions

### 3.1. Notations

Soit $D$ une partie d'un espace de Banach $E$, comme dans l'introduction (voir le 1.2). On notera $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}(D,\mathbb{K})$ l'ensemble des séries de fonctions définies sur $D$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Se donner une série de fonctions revient à se donner une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On notera $\sum u_n$ (ou $\sum u_n(\cdot)$ lorsqu'on veut mettre en évidence qu'il s'agit d'une série de fonctions et non d'une série à valeurs dans $\mathbb{K}$) la série de fonctions de terme général $u_n$. Lorsque la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est définie qu'à partir du rang $n_0$, on notera $\sum_{(n\geq n_0)} u_n$ (ou $\sum_{(n\geq n_0)} u_n(\cdot)$).

**Remarque 3.1.** *On pourra toujours considérer la série de fonctions comme définie à partir de $n=0$, en posant $u_0 = u_1 = \ldots = u_{n_0-1} = 0$.*

On rappelle que $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}(D,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre lorsqu'il est muni des trois opérations suivantes :

- *l'addition.* Soit $\sum u_n,\ \sum v_n \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}(D,\mathbb{K})$. La série $\sum u_n + \sum v_n$ est la série de terme général $u_n+v_n$,
- *la multiplication externe* (ou bien *multiplication par un scalaire*). Soit $\sum u_n \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}(D,\mathbb{K}),\ \lambda\in\mathbb{K}$. La série $\lambda\sum u_n$ est la suite de terme général $\lambda u_n$.
- *la multiplication* (également appelée *produit de Cauchy*). Soit $\sum u_n,\ \sum v_n \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}(D,\mathbb{K})$. La série $\sum u_n \sum v_n$ est la série de terme général
$$w_n = \sum\nolimits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

On définit la suite $(S_{u,n})_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles par
$$\forall x\in D,\quad \forall n\in\mathbb{N},\qquad S_{u,n}(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} u_k(x).$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la série concernée, on notera plus simplement $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles.

### 3.2. Définitions et exemples

#### 3.2.1. Convergence simple, absolue, normale, uniforme, compacte

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

**Définition 3.2.**
*(i) On dit que la série $\sum u_n$* converge simplement *(ou bien* est simplement convergente*) si, pour tout $x\in D$, la série $\sum u_n(x)$ (à valeurs dans $\mathbb{K}$) est convergente.*
*(ii) On dit que la série $\sum u_n$* converge absolument *(ou bien* est absolument convergente*) si, pour tout $x\in D$, la série $\sum u_n(x)$ converge absolument. (c'est-à-dire si la série -à valeurs dans $\mathbb{R}_+$- $\sum |u_n(x)|$ est convergente.)*

On rappelle qu'une série à valeurs complexes absolument convergente est de Cauchy, donc convergente. Ainsi, si la série de fonctions $\sum u_n$ converge absolument, elle est simplement convergente.
En revenant à la définition d'une série à valeurs complexes convergente, on voit que $\sum u_n$ converge simplement si

$$\forall x\in D,\ \exists S_x\in\mathbb{K},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq n_0 \Rightarrow \left|\sum\nolimits_{k=0}^{n} u_k(x) - S_x\right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Si $\sum u_n$ est simplement convergente, l'unicité de la somme des séries numériques permet de définir une fonction $S\in F(D,\mathbb{K})$ par
$$\forall x\in D,\qquad S(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} u_k(x).$$

La fonction $f$ s'appelle *la somme* de la série $\sum u_n$. On la notera $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

**Définition 3.3.** *On dit que la série $\sum u_n$* converge normalement *(ou bien* est normalement convergente, est normalement convergente sur *$D$, s'il y a lieu de préciser) si, il existe une série convergente $\sum v_n$ à termes réels positifs telle que*
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in D,\quad |u_n(x)| \leq v_n \tag{3.2}$$

**Lemme 3.4.** *Si la série $\sum u_n$ converge normalement, alors elle converge absolument (et donc simplement).*

**Preuve**.- En effet, la relation (3.2) entraîne que la série $\sum |u_n(x)|$ est convergente, par utilisation du critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

**Définition 3.5.**
(i) *On dit que la série $\sum u_n$* converge uniformément *(ou bien* est uniformément convergente, est uniformément convergente sur *$D$, s'il y a lieu de préciser) si, la suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ des sommes partielles converge uniformément sur $D$.*
*Ceci revient à dire qu'il existe une fonction $S : D \to \mathbb{K}$ telle que la suite $\left(\left\|\sum_{k=0}^{n} u_k(\cdot) - S(\cdot)\right\|_{D,\infty}\right)_n$ converge vers* 0.
(ii) *On dit que la série $\sum u_n$* converge compactement *(ou bien* est compactement convergente*) vers la fonction $S \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})$ si, pour tout ensemble compact $K$ inclus dans $D$, la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $K$ vers $S$.*

On vérifie facilement que la série $\sum u_n$ converge uniformément vers la fonction $S$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in D, \qquad n \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - S\right| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

On dit que $f$ est la *limite uniforme* de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La comparaison des relations (3.1) et (3.3) montre immédiatement le lemme suivant. (Comparez la place des expressions quantifiées "$\exists n_0 \in \mathbb{N}$" et "$\forall x \in D$".)

**Lemme 3.6.** *Si la série $\sum u_n$ converge uniformément (resp. compactement) vers $S$, alors elle converge simplement vers $S$.*

**Lemme 3.7.** *Si la série $\sum u_n$ converge normalement vers $S$, alors elle converge uniformément vers $S$.*

**Preuve**.- Supposons $\sum u_n$ normalement convergente. D'après le lemme 3.4, elle converge simplement. Soit $S$ sa somme. On a, en utilisant la relation (3.2),

$$\forall x \in D, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \qquad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{p} v_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

D'où $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et tout $x \in D$. En passant à la limite en $p$ (le membre de droite ne dépendant ni de $p$ ni de $x$), il vient

$$\forall x \in D, \quad |S(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

Comme la série $\sum v_k$ est convergente, on a $\lim_{n\to+\infty} \|S(x) - S_n(x)\| = 0$. D'où le résultat.

On résume les remarques précédentes et les lemmes 3.4, 2.3 et 3.7 dans le schéma :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{CC} & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\ \mathbf{CN} & \to & \mathbf{CU} & \to & \mathbf{CS} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathbf{CA} & & \end{array} \tag{3.4}$$

Toutes les autres implications sont fausses, comme le montre les exemples suivants. (On donne successivement l'intervalle réel sur lequel on étudie la série $\sum u_n$, son terme général, et ses "modes" de convergences.)

| | Intervalle | Terme général de la série | **CN** | **CU** | **CC** | **CA** | **CS** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $]0,+\infty[$ | $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^x}$ $(n \geq 2)$ | non | non | oui | non | oui |
| (2) | $[1,+\infty[$ | $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^x}$ $(n \geq 2)$ | non | oui | oui | non | oui |
| (3) | $]1,+\infty[$ | $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x(\ln n)}$ $(n \geq 2)$ | non | non | oui | oui | oui |
| (4) | $[0,1]$ | $u_n(x) = \begin{cases} x\sin\frac{2\pi}{x} \text{ sur } \left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right] \\ 0 \text{ sur } [0,1]\setminus\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right] \end{cases}$ $(n \geq 1)$ | non | oui | oui | oui | oui |
| (5) | $[0,1]$ | $u_n(x) = \begin{cases} x^n \text{ sur } [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 \text{ sur } [0,1]\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \end{cases}$ | non | non | non | oui | oui |

(3.5)

**Exercice 3.** *Vérifier les assertions du tableau (3.5).*

### 3.2.2. Critères de Cauchy

On transpose le 2.1.2 au cas des séries. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n(x)$ est de Cauchy si

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\sum\nolimits_{k=n+1}^{p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Comme $\mathbb{K}$ est complet, si la série $\sum u_n(x)$ est de Cauchy, elle est convergente.Donc, si pour tout $x \in D$, la série $\sum u_n(x)$ est de Cauchy, la série de fonctions $\sum u_n$ est simplement convergente.

**Définition 3.8.** *On dit qu'une série $\sum u_n$ ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$) satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $D$ si la suite de ses sommes partielles le satisfait, ce qui revient à*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \forall x \in D, \qquad n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\sum\nolimits_{k=n+1}^{p} u_k(x)\right| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Le résultat suivant est assez immédiat, compte des analogies entre suites et séries:

**Proposition 3.9.** *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
*(i) La série de fonctions $\sum u_n$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $D$,*
*(ii) La série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $D$.*

**Exercice 4.** *Démontrer la proposition 3.9.*

On va illustrer cette notion, en donnant une nouvelle démonstration du lemme 3.7. Supposons $\sum u_n$ normalement convergente. On a

$$\forall x \in D, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \qquad \left|\sum\nolimits_{k=n+1}^{p} u_k(x)\right| \leq \sum\nolimits_{k=n+1}^{p} |u_k(x)| \leq \sum\nolimits_{k=n+1}^{p} v_k. \tag{3.7}$$

Comme la série numérique $\sum v_k$ est convergente, elle est de Cauchy. Il est donc facile de déduire de la relation (3.7) que la série de fonctions $\sum u_n$ vérifie le critère (3.6) de Cauchy uniforme sur $D$, et donc qu'elle converge uniformément sur $D$.

### 3.3. Théorèmes généraux

**Théorème 3.10.** *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}^0(I)^{\mathbb{N}}$, où $I$ est un intervalle réel. On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément (resp. compactement) sur $I$ vers $S$. Alors $S$ est continue sur $I$.*

**Preuve**. Comme chaque $u_n$ est une fonction continue sur $I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est continue (somme finie de fonctions continues). Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathrm{C}^0(I)^{\mathbb{N}}$ et converge uniformément (resp. compactement) sur $I$ vers $S$. Donc $S$ est continue sur $I$, en appliquant le théorème 2.11.□

Ce résultat est le premier d'une série d'analogues aux théorèmes 2.13, 2.14 et 2.16. On les énonce ci-dessous en laissant la preuve (qui consiste simplement à une transposition "suite, série" comme ci-dessus) en exercice :

**Théorème 3.11.** *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}([a,b])^{\mathbb{N}}$. On suppose chaque $u_n$ Riemann intégrable sur $[a,b]$ et que la série$\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $S$. Alors $S$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$, la série $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et*

$$\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Théorème 3.12.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}^1(I)^{\mathbb{N}}$, où $I$ est un intervalle réel. On suppose que*
*(i) la série $\sum u_n$ converge simplement sur $I$ vers $S$.*
*(ii) la suite $\sum u_n'$ converge uniformément (resp. compactement) sur $I$ vers $T \in \mathcal{F}(I)^{\mathbb{N}}$.*
*Alors $S$ est continûment dérivable sur $I$, avec $S' = T = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k'$.*

**Théorème 3.13.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}^\infty(I)^{\mathbb{N}}$, où $I$ est un intervalle réel. On suppose que :*
*(i) la série $\sum u_n$ converge simplement sur $I$ vers $S$.*
*(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément (resp. compactement) sur $I$ vers une fonction $T^p$.*
*Alors $S$ est indéfiniment dérivable sur $I$, avec $S^{(p)} = T^p = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^{(p)}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

**Exercice 5.** *Démontrer les théorèmes 3.11, 3.12 et 3.13.*

# 4. Séries entières

Les séries entières jouent un rôle majeur en analyse complexe, et un rôle non négligeable en analyse réelle. Le programme du CAPES ne comprend pas l'analyse complexe classique (étude des fonctions analytiques, holomorphes, théorème des résidus,...), mais on peut néanmoins trouver de nombreux problèmes utilisant ou centrés sur les séries entières : étude de conditions suffisantes pour qu'une fonction de classe $C^\infty$ soit dévelopapble en série entière au voisinage d'un point, résolution d'équations différentielles à l'aide de séries entières, etc.

Ce cours visant essentiellement un public préparant le CAPES, il introduit les définitions dans le cadre de la variable complexe, présente le rayon de convergence dans ce cadre, mais la question de la développabilité en série entière sera principalement abordée pour des fonctions de la variable réelle.

## 4.1. Convergence des séries entières

### 4.1.1. Définitions, généralités

On considère ici des séries de fonctions, dont l'ensemble de définition $D$ est inclus dans le corps des complexes $\mathbb{C}$.

**Définition 4.1.** *On appelle* série entière, *toute série de fonctions $\sum u_n$ où, pour tout $n$, il existe un nombre complexe $a_n$ telle que la fonction $u_n$ s'écrive*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(z) = a_n z^n.$$

Ainsi, la fonction $u_n$ est définie sur $\mathbb{C}$. On remarque que la donnée d'une série entière est en fait celle d'une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le vocabulaire "série entière" provient de l'exposant entier dans l'expression monomiale donnant $u_n$. Si la suite $(a_n)_n$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang $n_0$, on utilisera les mêmes conventions de notations que dans le 3.1.

On notera $\mathbb{C}\{z\}$ l'ensemble des séries entières. $\mathbb{C}\{z\}$ est une sous-algèbre de l'ensemble des séries de fonctions définies sur $\mathbb{C}$, muni des opérations usuelles sur les séries de fonctions (voir le 3.1). En effet, on a :

- La somme des deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série $\sum (a_n + b_n) z^n$, leur produit, la série entière $\sum c_n z^n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$
- Le produit de la série entière $\sum a_n z^n$ par le scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est la série $\sum d_n z^n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \lambda c_n$.

On définit sur $\mathbb{C}\{z\}$ une *dérivation* $\frac{\partial \cdot}{\partial z}$ : à la série entière $\sum a_n z^n$, on fait correspondre la série entière dérivée donnée par
$$\sum_{(n\geq 1)} n a_n z^{n-1} = \sum (n+1)\, a_{n+1} z^n.$$
Cette dérivation satisfait les règles usuelles : la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, la dérivée d'un produit se calcule avec la règle de Leibniz. Ainsi, $\mathbb{C}\{z\}$ est une algèbre différentielle. (L'autre exemple classique d'algèbre différentielle est celui de $C^\infty(D, \mathbb{K})$, où $D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.)
On définit alors par récurrence la dérivée à tout ordre d'une série entière. Pour $p$ appartenant à $\mathbb{N}$, on vérifie facilement que la série dérivée d'ordre $p$ de $\sum a_n z^n$ s'écrit

$$\sum_{(n\geq p)} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n z^{n-p} = \sum (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) a_{n+p} z^n.$$

### 4.1.2. Le rayon de convergence

Un lemme classique et son corollaire servent à introduire la notion de rayon de convergence. Le théorème-définition 4.4 et la proposition 4.5 sont les résultats fondamentaux.

**Lemme 4.2.** *(Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, avec $|z_1| < |z_0|$, la série à termes complexes $\sum a_n z_1^n$ converge absolument.*

**Preuve**. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z_0^n| \leq M.$$

- Si $z_0 = 0$, l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |z_0|\}$ est vide, donc la conclusion est vérifiée.
- Si $z_0 \neq 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \, |z/z_0|^n \leq M \, |z/z_0|^n$. Pour $z_1 \in \mathbb{C}$, avec $|z_1| < |z_0|$, la série géométrique $\sum |z_1/z_0|^n$ converge, comme série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Donc, par comparaison, la série $\sum |a_n z_1|^n$ converge.□

**Corollaire 4.3.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série à termes complexes $\sum a_n z_0^n$ converge. Pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, avec $|z_1| < |z_0|$, la série à termes complexes $\sum a_n z_1^n$ converge absolument.*

**Preuve**. En effet, si la série $\sum a_n z_0^n$ converge, la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 (condition nécessaire de convergence). Elle est donc bornée, et on applique le lemme d'Abel (lemme 4.2).□

**Théorème - Définition 4.4.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un nombre unique $R \in [0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, avec $|z_1| < R$, la série à termes complexes $\sum a_n z_1^n$ converge absolument et pour tout $z_2 \in \mathbb{C}$, avec $|z_2| > R$, la série à termes complexes $\sum a_n z_2^n$ diverge.*
*Le réel $R$ s'appelle le* rayon de convergence *de la série entière $\sum a_n z^n$.*

**Preuve**.
*Existence.*- Soit $R$ la borne supérieure (éventuellement infinie) de l'ensemble

$$B = \left\{ r \in \overline{\mathbb{R}}_+ \;\middle|\; \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}. \tag{4.1}$$

Remarquons que, pour $z \in \mathbb{C}$, la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(|a_n z|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Supposons $|z| < R$. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < r < R$. La suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et d'après le lemme 4.2, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Supposons $|z| > R$. La suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée (en effet, la suite $(a_n^n \, |z|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne l'est pas). En particulier, son terme général ne tend pas vers 0, et la série $\sum a_n z^n$ est divergente.

*Unicité.*- Un raisonnement immédiat par l'absurde, laissé au lecteur, montre ce fait.□

En d'autres termes, la série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence $R$, converge absolument sur le disque $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. Ce disque s'appelle le *disque de convergence* de la série.
On remarque que la série diverge $\sum a_n z^n$ sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$. Sur le cercle $C(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$, parfois appelé cercle de convergence "tout peut se passer". Le nom de cercle de convergence est un peu impropre !

**Exemples 4.1.** *On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec*

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0, \qquad \forall n \geq 1 \quad a_n = 1/n^2, \quad b_n = 1/n \;, \quad c_n = 1,$$

*et les séries entières associées. On vérifie facilement que, pour tout $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$, avec $r < 1$, les suites $(n^{-p} r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées ($p = -2$, $-1$, $0$), tandis que, pour tout $r > 1$, les suites $(n^{-p} r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent (utiliser le critère de d'Alembert). Ainsi, selon le lemme d'Abel, le rayon de convergence des séries $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ est égal à 1. Cependant, pour $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| = 1$, la série à valeurs complexes $\sum a_n z^n$ converge absolument, la série à valeurs complexes $\sum c_n z^n$ diverge (le terme général ne tend pas vers 0).*

**Exercice 6.** *Etudier la convergence de la série $\sum b_n z^n$, sur le cercle de convergence.*

Dans la pratique, le lemme d'Abel sert rarement à déterminer le rayon de convergence d'une série entière. On utilisera notamment le résultat suivant.

**Proposition 4.5.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence $R$ est donné par la relation*

$$1/R = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

*où, par convention, $R = 0$ si $1/R = +\infty$ et $R = +\infty$ si $1/R = 0$.*

**Preuve**. Rappelons d'abord que, pour toute suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la quantité

$$\limsup_{n\to+\infty}\alpha_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n}\alpha_k\right)$$

est un élément bien défini de $\overline{\mathbb{R}}$, appelée la limite supérieure de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On rappelle également que, pour une série $\sum u_n$ à termes complexes, la série $\sum u_n$ converge absolument si $\limsup_{n\to+\infty}|u_n|^{(1/n)} < 1$ et diverge si $\limsup_{n\to+\infty}|u_n|^{(1/n)} > 1$. (Pour ces rappels, le lecteur pourra traiter l'exercice 7 ci-dessous.)
Soit $z\in\mathbb{C}$, posons $u_n = a_n z^n$. On a

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = |z|\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Posons $l = \limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

- Si $l = 0$, la série $\sum a_n z^n$ converge, sans condition sur $z$, puisque $\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = 0$. D'où $R = +\infty$.
- Si $l = +\infty$, pour tout $z\neq 0$, on a$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$, entrainant la divergence de la série $\sum a_n z^n$, pour tout $z\neq 0$ et $R = 0$.
- Si $l\in\mathbb{R}_+^*$, on a $|z|\,l < 1$ (resp. $|z|\,l > 1$) si, et seulement si, $|z| < 1/l$ (resp. $|z| > 1/l$). D'où $R = 1/l$.□

**Exercice 7.**
*(i) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Etablir l'existence de l'élément de $\overline{\mathbb{R}}$ donné par l'expression $\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n}\alpha_k$. (On pourra étudier la suite $\left(\beta_n = \sup_{k\geq n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ .) Etablir de même l'existence de l'élément de $\overline{\mathbb{R}}$ donné par l'expression $\lim_{n\to+\infty}\inf_{k\geq n}\alpha_k$, appelé la limite inférieure de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et noté $\liminf_{n\to+\infty}\alpha_n$.*
*(ii) Montrer, lorsque la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que $\limsup_{n\to+\infty}\alpha_n$ (resp. $\liminf_{n\to+\infty}\alpha_n$) est la plus grande (resp. la plus petite) valeur d'adhérence de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
*(iii) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si,*

$$\limsup_{n\to+\infty}\alpha_n = \liminf_{n\to+\infty}\alpha_n.$$

*(iv) Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. Montrer que*
*- si $\limsup_{n\to+\infty}|u_n|^{(1/n)} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.*
*- si $\limsup_{n\to+\infty}|u_n|^{(1/n)} > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Les critères de d'Alembert et de Cauchy peuvent également être utilisés.

**Proposition 4.6.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.*
*(i) (Critère de D'Alembert) Supposons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Si $\lim_{n\to+\infty}(|a_n|/|a_{n+1}|)$ existe (au sens d'existence d'une limite finie, ou d'une suite tendant vers $+\infty$), on a alors $R = \lim_{n\to+\infty}(|a_n|/|a_{n+1}|)$.*
*(ii) (Critère de Cauchy) Si $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ existe (au sens d'existence d'une limite finie, ou d'une suite tendant vers $+\infty$), on a alors $R = 1/\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$, avec les mêmes conventions que pour la proposition 4.5.*

**Preuve**.
*(i)* Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes et telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang et que $\lim_{n\to+\infty}(|u_{n+1}|/|u_n|)$ existe. D'après le critère de D'Alembert, la série $\sum u_n$ converge absolument si $\lim_{n\to+\infty}(|u_{n+1}|/|u_n|) < 1$ et diverge si $\lim_{n\to+\infty}(|u_{n+1}|/|u_n|) > 1$. Comme dans la preuve de la proposition 4.5, on applique ce résultat, pour $z\in\mathbb{C}$, à la série à termes complexes $\sum u_n$, avec $u_n = a_n z^n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
*(ii)* Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes telle que $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ existe. D'après le critère de Cauchy, si $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument et si $\lim_{n\to+\infty}(|u_{n+1}|/|u_n|) > 1$, elle diverge. On applique ce résultat comme dans le *(i)*.□

**Exemples 4.2.**
*(i) (Critère de D'Alembert) La série entière* $\sum z^n/n!$ *possède un rayon de convergence* $R$ *égal à* $+\infty$*. (En effet* $|a_n| / |a_{n+1}| = n+1 \to +\infty$*, pour* $n \to +\infty$*.) On définit alors la fonction exponentielle sur* $\mathbb{C}$ *par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!.$$

*(ii) (Critère de D'Alembert) La série entière* $\sum (n!) z^n$ *possède un rayon de convergence nul.*
*(iii) (Critère de Cauchy) Soit* $\rho \in \mathbb{R}_+$*. La série entière* $\sum \rho^n z^n$ *possde un rayon de convergence égal à* $1/\rho$*. (Avec la convention habituelle* $1/\rho = +\infty$ *si* $\rho = 0$*.) En effet* $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|\rho^n|}\right) = \rho$*.*

Il faut noter que le critère de d'Alembert demande que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Ainsi, *a priori*, il ne peut pas s'appliquer aux séries lacunaires, et en particulier aux séries dont les termes pairs (resp. impairs) sont nuls.

**Exemple 4.3.** *On considère la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, définie par* $a_n = 0$ *si* $n$ *est impair et* $a_n = (1/2)^{n/2}$ *sinon. On trouvera souvent la série* $\sum a_n z^n$ *notée sous la forme* $\sum b_m z^{2m}$ *avec* $b_m = (1/2)^m$*. Pour déterminer son rayon de convergence* $R$*, le critère de d'Alembert ne doit pas être appliqué (série lacunaire). Comme la suite* $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne possède pas de limite, le critère de Cauchy ne s'applique pas. Cependant la suite* $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\geq 0}$ *possède 2 valeurs d'adhérence, 0 et* $1/\sqrt{2}$*. Ainsi,* $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/\sqrt{2}$ *et* $R = \sqrt{2}$*.*

En prolongement de cet exemple, on lit souvent le calcul imprudent et erroné : "$\lim_{m\to+\infty} (|b_m| / |b_{m+1}|) = 2$, donc $R = 2$". Le caractère lacunaire de la série est en cause : en effectuant le "changement de variable" $Z = z^2$, le calcul précédent montre que la série $\sum b_m Z^m$ possède un rayon de convergence $R'$ égal à 2. Comme $|z^2| < 2 \Leftrightarrow |z| < \sqrt{2}$, on retrouve bien $R = \sqrt{2}$.

En revanche, le lecteur montrera (en s'inspirant de l'exemple ci-dessus) que pour des séries lacunaires du type $\sum b_m z^{2m}$ ou bien $\sum b_m z^{2m+1}$, on a :
*(i)* si $\lim_{m\to+\infty} (|b_m| / |b_{m+1}|) = 1$ (resp. $+\infty$) alors $R = 1$ (resp. $+\infty$),
*(ii)* si $\lim_{m\to+\infty} \left(\sqrt[m]{|b_m|}\right) = 1$ (resp. $+\infty$) alors $R = 1$ (resp. $+\infty$).

**Remarque 4.7.** *On utilise souvent le fait suivant. Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R$*. On suppose qu'il existe* $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que, pour tout* $z_0 \in \mathbb{C}$ *avec* $|z_0| < \rho$*, la série à termes complexes* $\sum a_n z_0^n$ *converge absolument, alors* $R \geq \rho$*.*

En effet, par hypothèse, pour tout $r \in [0, \rho[$ la série à termes complexes $\sum a_n r^n$ converge et donc son terme général tend vers 0. Alors, l'intervalle $[0, \rho[$ est inclus dans l'ensemble $B$ défini par la relation (4.1). Donc $R = \sup B \geq \rho$.

### 4.1.3. Rayon de convergence et opérations algébriques

**Proposition 4.8.** *Soit* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* $R$ *et* $R'$*. Le rayon de convergence* $R_s$ *(resp.* $R_p$*) de la série somme (resp. produit) est supérieur ou égal à* $\inf(R, R')$*.*

On peut préciser ce résultat : si $R \neq R'$, $R_s$ est égal à $\inf(R, R')$. Si $R = R'$, $R_s$ est supérieur ou égal à $R$.

**Preuve**. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $|z_0| < \inf(R, R')$. Les séries (à termes complexes) $\sum a_n z_0^n$ et $\sum b_n z_0^n$ convergent donc absolument d'après les théorèmes généraux sur les séries à termes complexes, la série $\sum a_n z_0^n + \sum b_n z_0^n$ (resp. $\sum a_n z_0^n \sum b_n z_0^n$) converge absolument. Ainsi $R_s$ (resp. $R_p$) vérifie $R_s$ (resp. $R_p$) $\geq \inf(R, R')$. Si $R \neq R'$, on peut supposer (par exemple) que $R < R'$. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $R < |z_0| < R'$, la série $\sum a_n z_0^n$ diverge tandis que la série $\sum b_n z_0^n$ converge. Alors, la série $\sum a_n z_0^n + \sum b_n z_0^n$ diverge, prouvant ainsi que $R = \inf(R, R')$.□

**Exemples 4.4.** *(Addition de deux séries entières)*
*(i)* Exemple trivial. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $(b_n = -a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Quel que soit le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$*, celui de la somme* $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n$ *est égal à* $+\infty$*.*

*(ii) Soit $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ données par*

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = 1, \quad b_n = -1 + 1/n! \ , \quad c_n = -1 + 1/n.$$

*Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ sont de rayon de convergence 1. La série somme $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n$ est de rayon de convergence $+\infty$, tandis que la série $\sum a_n z^n + \sum c_n z^n$ est de rayon de convergence 1.*

**Exemples 4.5.** *(Produit de deux séries entières)*
*(i)* Exemple trivial. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n = 0)_{n\in\mathbb{N}}$. Quel que soit le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, celui du produit est $\sum a_n z^n \sum b_n z^n$ est égal à $+\infty$.*
*(ii) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les séries $\sum c_n z^n$ et $\sum c_n z^{n+1}$ ont même rayon de convergence. Soit $R_1$ et $R_2$ leur rayon de convergence respectifs. On peut écrire la série $\sum c_n z^{n+1}$ comme le produit de la série $\sum a_n z^n$, avec $a_n = 1$ si $n = 1$ et $a_n = 0$ sinon, et de la série $\sum c_n z^n$. Ainsi $R_2 \geq R_1$, puisque la série $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $+\infty$. Réciproquement, soit $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $|z_0| < R_2$. Si $z_0 = 0$, la série $\sum c_n z_0^n$ converge. Si $z_0 \neq 0$, la série $(1/z_0) \sum c_n z_0^{n+1}$ converge (puisque $|z_0| < R_2$). Donc la série $\sum c_n z_0^n$ converge. La remarque 4.7 entraîne que $R_1 \geq R_2$.*

**Proposition 4.9.** *Une série entière et sa série dérivée possède le même rayon de convergence.*

**Preuve**. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. D'après la proposition 4.5, le rayon de convergence $R'$ de sa série dérivée $\sum (n+1)\, a_{n+1} z^n$ est le même que celui $R''$ de la série $\sum n a_n z^n$. (En effet, on écrit

$$\sum n a_n z^n = z \sum\nolimits_{(n\geq 1)} n a_n z^{n-1} = z \sum (n+1)\, a_{n+1} z^n.$$

L'exemple 4.5-*(ii)* entraîne le résultat. On a alors

$$1/R' = 1/R'' = \limsup_{n\to+\infty} |n a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} n^{1/n} |a_n|^{1/n}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1$. On en déduit que $\limsup_{n\to+\infty} |n a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 1/R$.□

**Remarque 4.10.** *On utilise ici le fait suivant. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ avec $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{C}$. On a alors $\limsup_{n\to+\infty} \alpha_n\beta_n = \alpha \limsup_{n\to+\infty} \beta_n$. On remarque que, en général, on a seulement*

$$\liminf_{n\to+\infty} \alpha_n \limsup_{n\to+\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to+\infty} \alpha_n\beta_n \leq \limsup_{n\to+\infty} \alpha_n \limsup_{n\to+\infty} \beta_n.$$

### 4.1.4. Propriétés de la somme d'une série entière

Le théorème est la base du théorème 4.13, fondamental pour la régularité de la somme des séries entières.

**Théorème 4.11.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Soit $r \in \mathbb{R}_+$ avec $r < R$. La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D(O,r)}$, et donc sur le disque ouvert $D(O,r)$.*

**Preuve**. On a, pour tout $z \in \overline{D(O,r)}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| \leq |a_n|\, r^n$. Comme $r < R$, la série $\sum |a_n|\, r^n$ converge, d'après le lemme d'Abel, assurant la convergence normale.□

**Corollaire 4.12.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. La série entière converge compactement sur $D(O,R)$.*

**Preuve**. Soit $K$ un compact du disque ouvert $D(O,R)$. Comme la distance de $K$ au cercle $C(O,R)$ est strictement positive, il existe $r \in [0,R[$ tel que $K \subset D(O,r)$. Comme la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(O,r)$, elle converge en particulier uniformément sur $K$.□

Etant donné une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R$, on peut définir la *fonction somme*, sur *l'intervalle de convergence* $]-R,R[$, par

$$S : ]-R,R[ \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Selon le théorème 4.11, la série $\sum a_n x^n$ (considérée comme série de fonctions de la variable réelle), converge normalement sur tout intervalle $[-r,r] \subset ]-R,R[$ et donc, en particulier compactement. On s'intéresse sans la suite de ce **4.1.4** aux propriétés de cette fonction somme.□

**Théorème 4.13.** *(Régularité de la fonction somme d'une série entière) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. La fonction somme est de classe $C^\infty$ sur $]-R, R[$.*
*De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre $p$ de $S$, s'écrit*

$$S^{(p)} : ]-R, R[ \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p}.$$

On peut reformuler ce résultat en disant que sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$, la fonction somme d'une série entière est une fonction indéfiniment dérivable, et que ses fonctions dérivées successices sont les fonctions sommes des séries entières dérivées successives.
On remarque également, qu'en particulier $S^{(p)}(0) = p!a_p$.

**Preuve**.
*(a)* Chaque fonction monomiale $u_n : ]-R, R[ \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto a_n x^n$ est de classe $C^\infty$, de dérivée d'ordre $p$

$$\forall x \in ]-R, R[\,, \quad u_n^{(p)}(x) = b_n^p x^p \text{ avec } \begin{cases} b_n^p = 0 \text{ pour } n < p \\ b_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)a_n \text{ pour } n \geq p \end{cases}.$$

Selon la proposition 4.9, chaque série entière $\sum b_n^p z^p$ est de rayon de convergence $R$.
*(b)* Le théorème 4.11 entraîne que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum b_n^p z^p$ converge compactement sur $]-R, R[$. D'après le théorème 3.13, la somme est de classe $C^\infty$ sur $]-R, R[$.□

**Proposition 4.14.** *(Intégration de la fonction somme d'une série entière) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R$ et $S$ sa fonction somme (de la variable réelle). Pour tout intervalle compact $[a, b] \subset ]-R, R[$ $(a < b)$ la fonction $S$ est intégrable et de plus*

$$\int_a^b S(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right). \tag{4.2}$$

**Preuve**. Comme chaque fonction monomiale $u_n : ]-R, R[ \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto a_n x^n$ est continue, donc intégrable sur $[a, b]$, et comme la série $\sum a_n x^n$ converge compactement sur $]-R, R[$ donc uniformément sur $[a, b]$, le théorème 3.11 donne la relation 4.2.□

**Corollaire 4.15.** *(Primitives de la fonction somme d'une série entière) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R$ et $S$ sa fonction somme. Sur l'intervalle $]-R, R[$, une fonction $T$ est primitive de $S$ si, et seulement si, il existe une constante complexe $k$ telle que*

$$\forall x \in ]-R, R[\,, \quad T(x) = k + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

**Exercice 8.** *Démontrer le corollaire 4.15 à partir de la proposition 4.14.*

### 4.2. Développement en série entière d'une fonction

Le 4.1.4 montre que la fonction somme d'une série entière est de classe $C^\infty$ sur l'intervalle de convergence. La question réciproque a fait l'objet de longs débats dans l'histoire des mathématiques : les fonctions de classe $C^\infty$ s'expriment-elles comme somme d'une série entière. La réponse négative à cette question a été à l'origine d'une des théories mathématique les plus fécondes, celle des fonctions analytiques.

#### 4.2.1. Définitions et conditions de développabilité

**Définition 4.16.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $V$ un intervalle ouvert contenant $x_0$ et $f \in \mathcal{F}(V, \mathbb{K})$. On dit que $f$ est* développable en série entière en $x_0$ *si il existe un réel $R > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R$ tels que*

$$\forall x \in ]x_0 - R, x_0 + R[ \cap V, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

**Théorème - Définition 4.17.** *Soit $V$ un intervalle ouvert, $x_0 \in V$ et $f \in \mathcal{F}(V, \mathbb{K})$ développable en série entière en $x_0$. Alors*
*(i) Il existe un intervalle $I \subset V$, voisinage de $x_0$, tel que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $I$ ;*

*(ii) Il ya unicité du développement en série entière en $x_0$.*
*(iii) Plus précisement, la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} z^n$ possède un rayon de convergence $R$ non nul et*

$$\forall x \in ]x_0 - R, x_0 + R[ \cap V, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

*La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ s'appelle* la série de Taylor *de $f$ au point $x_0$.*

**Preuve**. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ telle que

$$\forall x \in ]x_0 - R, x_0 + R[ \cap V, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n . \tag{4.3}$$

Le théorème 4.13 implique que la fonction

$$S : ]-R, R[ \to \mathbb{C} \quad t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \tau : x \mapsto x - x_0$$

est de classe $\mathbb{C}^\infty$, ainsi que la fonction composée $S \circ \tau_{x_0}$, définie sur $]x_0 - R, x_0 + R[$ par $S \circ \tau_{x_0}(x) = S(x - x_0)$. ($\tau_{x_0}$ désigne la translation $x \mapsto x - x_0$.) De plus

$$\forall x \in ]x_0 - R, x_0 + R[, \quad (S \circ \tau_{x_0})^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

La fonction $S \circ \tau_{x_0}$ coïncide avec $f$ sur $I = ]x_0 - R, x_0 + R[ \cap V$, qui est un intervalle ouvert voisinage de $x_0$, comme intersection de deux intervalles ouverts voisinages de $x_0$. Ainsi, le *(i)* est vérifié. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a cn particulier $f^{(p)}(x_0) = (S \circ \tau_{x_0})^{(p)}(x_0) = p! a_p$. Ainsi,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_p = f^{(p)}(x_0) / p!, \tag{4.4}$$

ce qui entraîne le *(ii)*. Le *(iii)* s'obtient en remplaçant $a_p$ dans (4.3), par la valeur trouvée en (4.4).□

On peut réécrire le théorème 4.17 en terme de *conditions nécessaires de développabilité.*

**Proposition 4.18.** *(Conditions nécessaires de développabilité) Soit $V$ un intervalle ouvert, $x_0 \in V$ et $f \in \mathcal{F}(V, \mathbb{K})$ :*

$$\left.\begin{array}{l}\text{pour que } f \text{ soit développable en série entière en } x_0\text{, il est nécessaire que}\\ (i)\ f \text{ soit de classe } C^\infty \text{ sur un intervalle ouvert voisinage de } x_0\ ;\\ (ii) \text{ la série } \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} z^n \text{ possède un rayon de convergence non nul.}\end{array}\right\} \tag{CNdev}$$

Des exemples montrent que :
*(a)* la condition *(i)* n'entraîne pas la condition *(ii)*,
*(b)* les conditions *(i)* et *(ii)* ne sont pas suffisantes.

L'exemple 4.6 illuste le *(a)* et l'exemple 4.7 le *(b)*.

**Exemple 4.6.** *(Fonction de classe $C^\infty$ dont la série de Taylor est divergente) On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec $u_n(x) = 2^{-n} \cos(n^2 x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie que :*
*($\alpha$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*
*Ainsi, la fonction somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cependant, on montre que (en calculant donc effectivement les $u_n^{(p)}$) :*
*($\beta$) la série $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} z^n$ possède un rayon de convergence nul.*
*Ainsi, $f$ n'est pas développable en série entière en 0.*

**Exemple 4.7.** *(Fonction $f$ de classe $C^\infty$ dont la série de Taylor converge vers une fonction différente de $f$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On montre par récurrence que :*
*($\gamma$) pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une fonction rationnelle $Q_p$ telle que : $\forall x \neq 0$, $f^{(p)}(x) = Q_p(x) \exp(-1/x^2)$.*
*Alors, on a $\lim_{x \to 0, x \neq 0} f^{(p)}(x) = 0$. ("L'exponentielle l'emporte sur la fraction rationnelle".) On en déduit que :*
*($\delta$) $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = 0$.*
*Ainsi, la série de Taylor de $f$ est nulle (donc possède un rayon de convergence infini). Sa somme est, bien sûr, nulle. Or, pour tout $x \neq 0$, $f$ est strictement positive. Donc, la série de Taylor de $f$ ne converge pas vers $f$.*

**Exercice 9.** *Démontrer avec précision les assertions* ($\alpha$)*,* ($\beta$)*,* ($\gamma$) *et* ($\delta$) *des exercices 4.6 et 4.7. On vérifiera en particulier, pour l'exercice 4.6 que*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(2k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{n^{4k}\cos\left(n^2 x\right)}{2^n} \qquad f^{(2k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{n^{4k+2}\sin\left(n^2 x\right)}{2^n}.$$

**Proposition 4.19.** *(Conditions nécessaires et suffisantes de développabilité) Soit $V$ un intervalle ouvert, $x_0 \in V$ et $f \in \mathcal{F}(V,\mathbb{K})$ :*

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est développable en série entière en } x_0 \text{ si, et seulement si, il existe } r>0 \text{ tel que :} \\ \left\{\begin{array}{l} (i)\ f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } ]x_0-r,x_0+r[\cap V\ ; \\ (ii) \text{ la suite } \left(R_n : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers 0 sur } ]-r,r[\cap V. \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{CNSdev}$$

**Preuve**. Pour cette proposition, nous allons utiliser la méthode habituelle, à savoir étudier le problème pour $x_0 = 0$, cas auquel on peut toujours se ramener par la translation $\tau_{x_0} : x \to x - x_0$.
*(a)* Si $f$ est développable en série entière en 0, le théorème 4.17 (points *(i)* et *(iii)*) entraîne les points *(i)* et *(ii)* ci-dessus.
*(b)* Si *(i)* est satisfait, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie. Si *(ii)* est satisfait, il existe $r' > 0$ tel que $]-r',r'[ \subset ]-r,r[\cap V$ et la série $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge sur $]-r',r'[$. D'après la remarque 4.7, le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ est supérieur à $r'$. Sur $]-r',r'[$ la série converge vers $f$, d'après *(ii)*.□

Soit $V$ un intervalle ouvert, voisinage de 0 et $f \in \mathrm{C}^\infty(V,\mathbb{K})$. La proposition 4.19 montre que l'étude de la développabilité en série entière en 0 se ramène à celle de la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On remarque qu'on a

$$\forall x \in V \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-v)^n}{n!} f^{(n+1)}(xv)\,\mathrm{d}v, \tag{4.5}$$

en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral.
Un problème important est donc de trouver des conditions suffisantes pour que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0. On en donne deux (propositions 4.20 et 4.21) qui suffisent pour traiter les exemples courants.

**Proposition 4.20.** *(Conditions suffisantes de développabilité) Soit $V$ un intervalle ouvert, $x_0 \in V$ et $f \in \mathcal{F}(V,\mathbb{K})$ :*

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est développable en série entière en } x_0 \text{ si il existe } r>0 \text{ et } C,\ M>0 \text{ tels que :} \\ \left\{\begin{array}{l} (i)\ f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } ]x_0-r,x_0+r[\cap V\ ; \\ (ii) \text{ Pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ tout } x \in ]x_0-r,x_0+r[\cap V,\ \left|f^{(n)}(x)\right| \le C\,M^n n!. \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{CSdev}$$

**Preuve**. On se ramène à $x_0 = 0$, par la translation $\tau_{x_0} : x \to x - x_0$. La formule intégrale (4.5) montre que, sous l'hypothèse *(ii)*, on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in ]x_0-r,x_0+r[\cap V,\quad |R_n(x)| &\le C\,|x|^{n+1} M^{n+1}(n+1)\int_0^1 (1-v)^n\,\mathrm{d}v. \\ &\le C\,|x|^{n+1} M^{n+1}. \end{aligned}$$

Soit $x \in ]x_0-r,x_0+r[\cap V$ tel que de plus $|x| < 1/M$. Soit $\rho > 0$ tel que $|x| < \rho < 1/M$. On a

$$|x|^{n+1} M^{n+1} < (\rho M)^{n+1},$$

avec $0 < \rho M < 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty}(\rho M)^{n+1} = 0$, et la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 sur $]x_0-r',x_0+r'[\cap V$, avec $r' = \min(r,1/M)$.□

**Proposition 4.21.** *Soit $V$ un intervalle ouvert, $x_0 \in V$ et $f \in \mathrm{C}^\infty(V,\mathbb{K})$. S'il existe $C,\ M > 0$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall x \in V,\quad \left|f^{(n)}(x)\right| \le C\,M^n, \tag{4.6}$$

*la série entière* $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} z^k$ *possède un rayon de convergence infini et $f$ est somme de sa série entière sur $V$.*

**Preuve**. On a
$$\left(\left|f^{(n)}(x)\right|/n!\right)^{1/n} \leq C^{1/n}M/(n!)^{1/n}.$$
D'après la formule de Stirling ($n! \sim (n/\mathrm{e})^n \sqrt{2\pi n}$, pour $n \to +\infty$), il vient $(n!)^{1/n} \sim (n/\mathrm{e})(2\pi n)^{1/(2n)}$, pour $n \to +\infty$, avec $\lim_{n\to+\infty}(2\pi n)^{1/(2n)} = 1$. D'où $\lim_{n\to+\infty}(n!)^{1/n} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\left|f^{(n)}(x)\right|/n!\right)^{1/n} = 0$. Ainsi, d'après le critère de Cauchy, la série $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} z^k$ possède un rayon de convergence infini. De plus, on a (avec les notations de la preuve de la proposition 4.20)
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in V, \qquad |R_n(x)| \leq \frac{C|x|^{n+1} M^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-v)^n \,\mathrm{d}v \leq \frac{C|Mx|^{n+1}}{(n+1)!}.$$
On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} C|Mx|^{n+1}/(n+1)! = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, pour tout $x \in V$.□

### 4.2.2. Exemples

Les exemples suivants portent sur des développements en série entière en 0 de fonctions classiques.

**Exponentielle et fonctions hyperboliques** Dans l'exemple 4.2, on a définit la fonction exponentielle complexe sur $\mathbb{C}$, par
$$\mathrm{e}^z = \exp(z) = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$
En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

**Proposition 4.22.** *On a :*
*(i) pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, on a* $\exp^{(p)}(x) = \exp(x)$,
*(ii) pour tout $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, on a* $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

**Preuve**.
*(i)* D'après le théorème 4.13, pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp^{(p)}(x)$ s'écrit
$$\exp^{(p)}(x) = \sum\nolimits_{n=p}^{+\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)x^{n-p}}{n!} = \sum\nolimits_{n=p}^{+\infty} n\frac{x^{n-p}}{(n-p)!} = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$
*(ii)* Soit $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. On a $\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ avec
$$c_n = \sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{{z_1}^k}{k!}\frac{{z_2}^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}{z_1}^k {z_2}^{n-k} = \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n,$$
par la formule du binôme.□

On définit alors les fonctions cosinus hyperbolique, notée ch (resp. sinus hyperbolique, notée sh) comme étant la partie paire (resp. impaire) de la fonction exp. On a alors
$$\operatorname{ch} x = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (\text{resp. } \operatorname{sh} x = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}).$$

**Fonctions trigonométriques** On suppose connues les fonctions trigonométriques, et leur propriétés usuelles. On a alors
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{resp. } \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)). \tag{4.7}$$
Ainsi, les dérivées successives de la fonction cosinus (resp. sinus) sont bornées sur $\mathbb{R}$. Les formules (4.7) entraînent que
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2p)}(0) = (-1)^p, \quad \cos^{(2p+1)}(0) = 0 \quad (\text{resp. } \sin^{(2p)}(0) = 0,\ \sin^{(2p+1)}(0) = (-1)^p).$$

Selon la proposition 4.21, les séries entières

$$\sum \cos^{(2n)}(0)\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \left(\text{resp.}\quad \sum \sin^{(2n+1)}(0)\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

possèdent un rayon de convergence égal à $+\infty$ et la fonction cosinus (resp. sinus) est somme, sur $R$, de sa série entière

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \left(\text{resp.}\quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right). \tag{4.8}$$

**Remarque 4.23.** *On peut, à l'inverse, définir les fonctions trigonométriques à partir des formules (4.8) et montrer qu'elles vérifient les propriétés usuelles.*

**Fonctions puissances** Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. La fonction $p_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est (au moins) définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et de classe $C^\infty$ sur cet intervalle. On démontre (par récurrence) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_\alpha^{(n)}(x) = \alpha\,(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n}.$$

En reprenant les notations de la proposition 4.19 on remarque (à l'aide de (4.5)) que

$$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[, \quad R_n(x) = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$$

On note classiquement $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$ (coefficient binomial). On remarque que $\left|\frac{x-u}{1+u}\right| \le |x|$ (attention, $x$ peut être négatif !). D'où

$$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[, \quad |R_n(x)| \le \underbrace{\left|\binom{\alpha}{n}\right| |x|^n}_{\beta(n,x)} \underbrace{\left|\int_0^x |1+u|^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u\right|}_{C(x)}.$$

Comme $\beta(n+1,x)/\beta(n,x) = \frac{|\alpha-n|}{n+1}|x| \to |x|$, pour $n \to +\infty$, on constate, par le critère de d'Alembert, que la série $\sum \beta(n,x)$ converge pour $|x|<1$. Son terme général $\beta(n,x)$ tend donc vers 0. Comme $C(x)$ ne dépend pas de $n$, on a donc $\lim_{n\to+\infty}|R_n(x)| = 0$, pourvu que $|x|<1$. Ainsi

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \tag{4.9}$$

En faisant $x := -x$, on obtient

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \qquad (1-x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,(-1)^n\,x^n \tag{4.10}$$

**Remarque 4.24.** *Le cas $\alpha \in \mathbb{N}$ correspondant à un cas particulier de fonctions polynomiale. On a*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (1+x)^p = \sum_{k=0}^{p} C_n^k x^k.$$

On déduit de (4.9) et (4.10) les relations suivantes (on fait $\alpha = -1$)

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,x^n\,, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n. \tag{4.11}$$

**Remarque 4.25.** *On obtient en général les relations (4.11) à partir de l'expression de la somme de la série géométrique de premier terme 1 et de raison $z$.*

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

*D'où $1/(1-z) = \sum_{k=0}^{n} z^k + z^{n+1}/(1-z)$. Comme, pour $|z|<1$, on a $\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$, on en déduit la relation*

$$\forall z \in D(0,1), \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,$$

*formule dont la deuxième égalité de (4.11) est la restriction à $z \in \left]-1,1\right[$.*

Avec le théorème 4.17, on déduit de (4.11) par récurrence, les formules

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left]-1,1\right[, \qquad \frac{1}{(1+x)^p} = \sum_{n=p-1}^{+\infty} C_n^{p-1}\,(-1)^{n-p+1}\,x^n \qquad \frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=p-1}^{+\infty} C_n^{p-1} x^{n-p+1}. \tag{4.12}$$

**Exercice 10.** *Vérifier en détail les formules (4.12).*

**Fonction logarithme** En appliquant la première égalité des relations (4.11) et le théorème 4.14, on obtient

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}.$$

D'où

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

**Autres développements classiques** Les formules (4.10) et (4.11) donnent

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \mathrm{C}_{2n}^n x^{2n}, \qquad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Par intégration (théorème 4.14), on en déduit

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \mathrm{C}_{2n}^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

## 5. Séries de Fourier

Dans le cadre du programme du CAPES, les séries de Fourier se traitent en utilisant l'intégrale de Riemann, ce qui oblige à des compromis sur les espaces dans lesquels on les étudie. Cette section commence donc par fixer les dits espaces.

### 5.1. Préliminaires

#### 5.1.1. Quelques espaces de fonctions périodiques

Soit $T$ un nombre réel. On note $E_T(\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, localement intégrables, de période $T$ au sens suivant

$$\forall f \in E_T(\mathbb{K}), \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

(Autrement dit, $T$ est une période de $f$, mais $f$ peut en admettre une inférieure.)

On vérifie que :

**Lemme 5.1.** *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.*

**Théorème 5.2.** *L'ensemble $E_T(\mathbb{K})$ est une sous algèbre de l'algèbre $\mathcal{F}(D,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^D$.*

On va distinguer dans $E_T(\mathbb{K})$ des sous ensembles qui seront utilisés dans les 5.2 et 5.3.

**Définition 5.3.** *(fonction périodique continue par morceaux) On dit que $f \in E_T(\mathbb{K})$ est* continue par morceaux, *s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\le i\le n}$ de l'intervalle $[0,T]$ telle que :*
*(i) $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est continue,*
*(ii) en tout $x_i$, $0 \le i \le n$, les limites unilatérales de $f$ (c'est-à-dire à droite et à gauche) existent.*
*On note $E_T^0(\mathbb{K})$ le sous ensemble de $E_T(\mathbb{K})$ constitué des fonctions continues par morceaux.*

De manière plus brève, on dit que $f \in E_T(\mathbb{K})$ est continue par morceaux si, sur l'intervalle $[0,T]$, elle ne présente qu'un nombre fini de *discontinuités de première espèce.* (Discontinuités caractérisées par l'existence des limites unilatérales.)

**Remarque 5.4.** *On démontre facilement, compte tenu de la périodicité de $f$, qu'elle est continue par morceaux, si, et seulement si elle présente un nombre fini de discontinuités de première espèce sur un intervalle quelconque de longueur $T$.*

**Théorème 5.5.** *L'ensemble $E_T^0(\mathbb{K})$ est une sous algèbre de l'algèbre $E_T(\mathbb{K})$.*

**Exercice 11.** *Démontrer le théorème 5.5.*

On utilisera également les deux espaces suivants :

- $\mathrm{C}^0_T(\mathbb{K})$, la $\mathbb{K}$-algèbre des fonctions continues de période $T$,
- $\mathrm{C}^1_T(\mathbb{K})$, la $\mathbb{K}$-algèbre des fonctions de classe $\mathrm{C}^1$ de période $T$,

On a les inclusions suivantes entre les espaces introduits ci-dessus (elles sont symbolisées par les flêches)

$$\mathrm{C}^1_T(\mathbb{K}) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{C}^0_T(\mathbb{K}) \quad \longrightarrow \quad E^0_T(\mathbb{K}) \quad \longrightarrow \quad E_T(\mathbb{K})$$

Dans la suite, on omettra le corps d'arrivée lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté (par exemple $E^0_T$ au lieu de $E^0_T(\mathbb{K})$). Remarquons également que la structure vectorielle des espaces de fonctions sera quasiment la seule utilisée dans la suite.

### 5.1.2. Produit scalaire dans $\mathrm{C}^0_T(\mathbb{K})$

**Théorème 5.6.** *L'application, à valeurs complexes, définie sur $E_{2\pi}(\mathbb{C})\times E_{2\pi}(\mathbb{C})$ par*

$$\forall\, (f,g) \in (E_{2\pi}(\mathbb{C}))^2\,, \qquad \langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

*est une forme hermitienne positive, id est :*
*(i) elle est antilinéaire par rapport à la première variable, linéaire par rapport à la seconde, c'est-à-dire que*

$$\forall\, (f,g,h) \in (E_{2\pi}(\mathbb{C}))^2\,,\ \ \forall\lambda \in \mathbb{C}, \qquad \begin{cases} \langle f+g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle & \langle \lambda f,g\rangle = \overline{\lambda}\,\langle f,g\rangle \\ \langle h,f+g\rangle = \langle h,f\rangle + \langle h,g\rangle & \langle f,\lambda g\rangle = \lambda\,\langle f,g\rangle \end{cases} \quad ,$$

*(ii) elle vérifie : $\forall\,(f,g) \in (E_{2\pi}(\mathbb{C}))^2\,,\quad \langle g,f\rangle = \overline{\langle f,g\rangle}\,,$*
*(iii) elle est positive. : $\forall f \in E_{2\pi}(\mathbb{C}),\quad \langle f,f\rangle \geq 0.$*

La preuve est immédiate. On remarque cependant que la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ n'est pas définie positive. En effet, pour une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[0,2\pi]$ et positive, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ peut être nulle sans que $\varphi$ le soit. On en déduit le résultat suivant.

**Proposition 5.7.** *L'application, à valeurs réelles positives, définie sur $E_{2\pi}(\mathbb{C})$ par*

$$\forall f \in E_{2\pi}(\mathbb{C}), \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

*est une semi-norme sur $E_{2\pi}(\mathbb{C})$.*

Ainsi, l'espace$E_{2\pi}(\mathbb{C})$ muni de la semi-norme $\|\cdot\|_2$ est un espace topologique non séparé. Il faut se restreindre à $\mathrm{C}^0_T(\mathbb{K})$ pour obtenir un espace préhilbertien.

**Théorème 5.8.**
*(i) La restriction de l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définie par la relation (5.1), à l'espace $\mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})\times\mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})$ est un produit scalaire.*
*(ii) Ainsi, la restriction de l'application $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ est une norme sur $\mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})$.*

**Remarque 5.9.** *L'espace $\mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, n'est pas complet, comme le montre le contre-exemple développé ci-dessous.*

**Exercice 12.** *Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$, $2\pi$-périodique et paire, donnée sur $[0,\pi]$ par*

$$\forall n \geq 1, \quad f_{n\,|[0,\pi/2]} = 1\ , \quad f_{n\,|[\pi/2,\pi/2+1/n]} = n\,(\pi/2 - x) + 1\ , \quad f_{n\,|[\pi/2+1/n,\pi]} = 0.$$

*(i) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ est continue.*
*(ii) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy.*
*(iii) Montrer (par l'absurde) que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans $\mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})$.*

**Corrigé**.
*(i)* Par construction, chaque $f_n$ est constante sur $[0,\pi/2]$, affine sur $[\pi/2,\pi/2+1/n]$, constante sur $[\pi/2+1/n,\pi]$. Le lecteur vérifiera sans peine que les “raccordements” se passent bien aux points $0$, $\pi/2$ $\pi/2+1/n$ et $\pi$. (Les points $0$ et $\pi$ sont à considérer, pour les questions de parité et de périodicité.

*(ii)* On a

$$\forall n \geq 1, \quad \forall p \geq 0, \quad \|f_n - f_{n+p}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t) - f_{n+p}(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi/2+1/n} |f_n(t) - f_{n+p}(t)|^2 \, \mathrm{d}t,$$

puisque la fonction $|f_n - f_{n+p}|^2$ est paire et que les fonctions $f_n$ et $f_{n+p}$ coïncident sur $[0, \pi/2]$ et $[\pi/2 + 1/n, \pi]$. Comme $f_{n+p} \leq f_n \leq 1$ sur $[\pi/2, \pi/2 + 1/n]$, on a

$$\forall n \geq 1, \quad \|f_n - f_{n+p}\|_2^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi/2+1/n} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{\pi n}. \tag{5.2}$$

La relation (5.2) entraîne facilement le résultat, puisque la majoration est indépendante de $p$.

*(iii)* On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe $f \in \mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})$, limite de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$. On a alors

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} |f_n(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \|f_n - f\|_2^2 .$$

Comme $f_{n\,|[0,\pi/2]} = 1$, pour tout $n \geq 1$, on en déduit

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} |1 - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \|f_n - f\|_2^2 .$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$, il vient $\int_0^{\pi/2} |1 - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0$. La fonction $t \mapsto |1 - f(t)|^2$ étant continue et positive, elle est nulle sur $[0, \pi/2]$. Donc $f_{|[0,\pi/2]} = 1$. De même, pour tout $\alpha \in ]0, \pi/2[$, on a,

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi} |f_n(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \|f_n - f\|_2^2$$

Or, pour tout $n \geq 1/\alpha$, on a $\pi/2 + 1/n \leq \pi/2 + \alpha$. Donc $f_{n\,|[\pi/2+1/\alpha,\pi]} = 0$, puis

$$\forall n \geq 1/\alpha, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \|f_n - f\|_2^2 .$$

Comme ci-dessus, on en déduit que $f_{|[\pi/2+\alpha,\pi]} = 0$. Ainsi (en faisant tendre $\alpha$ vers 0), on a $f_{|]\pi/2,\pi]} = 0$. Il en résulte que la fonction $f$ est discontinue en $\pi/2$.

### 5.1.3. Remarque : généralisation de la notion de série

Dans ce cours, nous n'introduirons pas la notion de famille sommable en toute généralité. Nous utiliserons seulement les notions suivantes.

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille indexée par $\mathbb{Z}$ de nombre complexes.

- On notera $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ la série complexe de terme d'ordre 0, $c_0$ et de terme général $c_n + c_{-n}$, (on note également cette série sous la forme $c_0 + \sum_{n\geq 1}(c_n + c_{-n})$),
- Si la série $c_0 + \sum_{n\geq 1}(c_n + c_{-n})$ converge, on dira que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ converge et on notera $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ la somme de la série $c_0 + \sum_{n\geq 1}(c_n + c_{-n})$.

La convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ s'étudie à l'aide des sommes partielles, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$S_n = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k + c_{-k}) .$$

**Remarque 5.10.** *On notera que cette notion de convergence est différente de celle liée à l'étude de la suite double*

$$S_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} c_k$$

*qu'on étudie pour $m \to -\infty$ et $n \to +\infty$.*

*Cette deuxième notion de convergence est équivalente à la suivante : la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ converge si, et seulement si, les séries $\sum_{n\geq 0} c_n$ et $\sum_{n\geq 1} c_{-n}$ convergent au sens classique. On montre alors que*

$$\lim_{(m,n)\to(-\infty,+\infty)} S_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}.$$

*On remarque facilement que si la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ converge au deuxième sens, alors elle converge au premier sens. La réciproque est fausse en général.*
*Cependant, le lecteur constatera que dans le cas d'une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à termes positifs les deux notions sont équivalentes.*
*Le lecteur est invité à faire la comparaison avec le cas des intégrales doublement généralisées (voir le document de cette même collection.)*

**Exemple 5.1.** *La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n = 1/n$ et $c_0 = 0$ est convergente, de somme 0 au premier sens, mais divergente au deuxième sens.*

## 5.2. Coefficients de Fourier et somme (finie) de Fourier

### 5.2.1. Coefficients de Fourier exponentiels et somme de Fourier

**Le cas de $\mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})$** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}_n(x) = \mathrm{e}^{inx}.$$

**Proposition 5.11.** *La famille $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale, c'est-à-dire que*

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \qquad \langle \mathrm{e}_m, \mathrm{e}_n \rangle = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

**Définition 5.12.**
*(i) On appelle* fonction polynôme trigonométrique *(ou, de manières incorrecte,* polynôme trigonométrique*) toute combinaison linéaire de fonctions de la famille $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ .*
*(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $E_{2\pi,n}(\mathbb{C})$, l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\mathrm{e}_k$, $-n \leq k \leq n$.*

L'espace $E_{2\pi,n}(\mathbb{C})$ est un sous espace de dimension $2n+1$ de $\mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})$. Pour la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_2$, il est donc un sous espace complet de $\mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})$.

**Définition 5.13.** *Soit $f \in \mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})$.*
*(i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on appelle $n^{\text{ème}}$*coefficient de Fourier *de $f$, le nombre complexe*

$$c_k(f) = \langle \mathrm{e}_k, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t.$$

*(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle* somme de Fourier *de $f$ d'ordre $n$, le polynôme trigonométrique*

$$S_n(f) = \sum\nolimits_{k=-n}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}_k.$$

**Lemme 5.14.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $f - S_n(f)$ est orthogonal à $E_{2\pi,n}(\mathbb{C})$.*

**Preuve**. Il suffit de vérifier que, pour tout $j \in \{-n, \ldots, n\}$, $f - S_n(f)$ est orthogonal à $\mathrm{e}_j$. On a

$$\langle \mathrm{e}_j,\, f - S_n(f) \rangle = \left\langle \mathrm{e}_j,\, f - \sum\nolimits_{k=-n}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}_k \right\rangle = \langle \mathrm{e}_j, f \rangle - \sum\nolimits_{k=-n}^{n} c_k(f) \langle \mathrm{e}_j, \mathrm{e}_k \rangle,$$

par linéarité. Or $\langle \mathrm{e}_j, f \rangle = c_j(f)$ et $\langle \mathrm{e}_j, \mathrm{e}_k \rangle = \delta_{jk}$. Doù $\langle \mathrm{e}_j,\, f - S_n(f) \rangle = 0.\square$

On en déduit immédiatement la proposition suivante.

**Proposition 5.15.** *L'application*

$$\mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C}) \to E_{2\pi,n}(\mathbb{C}) \qquad f \mapsto S_n(f)$$

*est la projection orthogonale sur $E_{2\pi,n}(\mathbb{C})$.*

Les propriétés de la projection orthogonale entraînent le corollaire suivant.

**Corollaire 5.16.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $f \in \mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{C})$, $S_n(f)$ est la meilleure approximation en moyenne quadratique de $f$ par un polynôme trigonométrique de $E_{2\pi,n}(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que*

$$\|f - S_n(f)\| = d(f, E_{2\pi,n}(\mathbb{C})) = \inf_{g \in E_{2\pi,n}(\mathbb{C})} \|f - g\|.$$

**Corollaire 5.17.** *(Inégalité de Bessel) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

**Preuve**. En effet, comme $f - S_n(f)$ est orthogonal à $S_n(f)$, le théorème de Pythagore assure que

$$\|f - S_n(f)\|^2 + \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2. \tag{5.4}$$

D'où $\|S_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2$, avec $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$ et, puisque la famille $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale

$$\|S_n(f)\|^2 = \left\langle \sum_{j=-n}^{n} c_j(f) \, \mathrm{e}_j, \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \, \mathrm{e}_k \right\rangle = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2.$$

**Extension à $E_{2\pi}(\mathbb{C})$** Rappelons que la forme hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est pas définie positive sur $E_{2\pi}(\mathbb{C})$ et donc que $\|\cdot\|_2$ est seulement une semi-norme sur cet espace. Cependant, la définition 5.13 des coefficients de Fourier et des sommes de fourier se généralise sans problème aux éléments de $E_{2\pi}(\mathbb{C})$.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$, l'orthogonalité du vecteur $f - S_n(f)$ à $E_{2\pi,n}(\mathbb{C})$ reste vraie, entraînant que les corollaires 5.16 et 5.17 le sont également. Ainsi $S_n(f)$ est la meilleure approximation en moyenne quadratique de $f$ par un élément de $E_{2\pi,n}(\mathbb{C})$.

### 5.2.2. Coefficients de Fourier trigonométriques

Dans le cas de fonctions de $E_{2\pi}(\mathbb{R})$, le recours aux fonctions exponentielles complexes ne se justifient pas forcément. Il est alors commode de définir des coefficients de Fourier, basés sur les fonctions cosinus et sinus.
Rappelons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} \cos nx = \dfrac{\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}}{2} & \sin nx = \dfrac{\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx}}{2i} \\ \mathrm{e}^{inx} = \cos nx + i \sin nx & \mathrm{e}^{-inx} = \cos nx - i \sin nx \end{cases}.$$

Soit $f \in E_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la somme $S_n(f)$, en regroupant les indices opposées, on obtient

$$\begin{aligned} S_n(f) &= c_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \left( c_k(f)\mathrm{e}^{ikx} + c_{-k}(f)\mathrm{e}^{-ikx} \right), \\ &= c_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \left( c_k(f) + c_{-k}(f) \right) \cos kx + i \left( c_k(f) - c_{-k}(f) \right) \sin kx. \end{aligned}$$

On pose alors, pour tout $k \geq 1$,

$$\left. \begin{aligned} a_0(f) &= c_0(f) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \mathrm{d}t, \\ a_k(f) &= c_k(f) + c_{-k}(f) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \mathrm{e}^{-ikt} + \mathrm{e}^{ikt} \right) \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, \mathrm{d}t, \\ b_k(f) &= i \left( c_k(f) - c_{-k}(f) \right) = \tfrac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \mathrm{e}^{-ikt} - \mathrm{e}^{ikt} \right) \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, \mathrm{d}t. \end{aligned} \right\} \tag{5.5}$$

Comme $f$ est à valeurs réelles, on remarque que les termes $c_k(f)$ et $c_{-k}(f)$ $(k \in \mathbb{N})$ sont des nombres complexes conjugués et que les coefficients $a_k(f)$ $(k \in \mathbb{N})$ et $a_k(f)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ sont réels.

**Définition 5.18.** *Les coefficients $a_k(f)$ et $b_k(f)$ définis par les relations (5.5) s'appellent les coefficients de Fourier trigonométriques de $f$.*

**Remarque 5.19.** *Les relations (5.5) permettent immédiatement d'exprimer les coefficients de Fourier exponentiel $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ en fonction des $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et des $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a, pour tout $k \geq 1$,*

$$\begin{aligned} c_0(f) &= a_0(f), \\ c_k(f) &= \tfrac{1}{2} \left( a_k(f) - i b_k(f) \right), \\ b_k(f) &= \tfrac{1}{2} \left( a_k(f) + i b_k(f) \right). \end{aligned}$$

La somme $S_n(f)$, écrite sous la forme,

$$a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + ib_k(f)\sin kx$$

s'appelle également *somme de Fourier* de $f$. On précisera éventuellement en *somme de Fourier trigonométrique.*

**Remarque 5.20.** *Certains auteurs préférent unifier la formule donnant les $a_n(f)$ $(n \in \mathbb{N})$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t.$$

*Avec cette définition, la somme de Fourier de $f$ s'écrit (pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$)*

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + ib_k(f)\sin kx,$$

*avec $c_0(f) = a_0(f)/2$.*

Nous conserverons dans ce document pour $a_0(f)$ la formule donnée par les relations (5.5).

**Remarque 5.21.** *Lorsque $f \in E_{2\pi}(\mathbb{R})$ est paire (resp. impaire), les formules (5.5) montrent que*

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \ ; \quad \forall n \geq 1 \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \qquad b_n(f) = 0,$$
$$(\text{resp. } \forall n \geq 0 \quad a_n(f) = 0 \ ; \quad \forall n \geq 1, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t.$$

Ces propriétés découlent immédiatement de la parité des fonctions à intégrer.

### 5.3. Séries de Fourier et convergence

#### 5.3.1. Position du problème

On appelle *série de Fourier exponentielle* (resp. *série de Fourier trigonométrique*) toute série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ (resp. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$), où les $u_n$ (resp. $v_n$) sont des fonctions de la variable réelle vérifiant

$$\forall (n,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}, \quad u_n(x) \equiv c_n \mathrm{e}^{inx}$$
$$(\text{resp. } \forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}, \quad v_0(x) \equiv a_0 \ ; \quad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{R}, \quad v_n(x) \equiv c_n\cos nx + i\sin nx).$$

où les $c_n$ (resp. les $a_n$ et les $b_n$) sont des constantes complexes.

On s'intéresse au problème de la convergence d'une telle série, essentiellement lorsque les $c_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ (resp. les $a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ et les $b_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$) sont les coefficients de Fourier exponentiel (resp. trigonométrique) d'une fonction $f \in E_{2\pi}(\mathbb{K})$.

**Remarque 5.22.** *Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), on étudie plutôt la série exponentielle (resp. trigonométrique), mais il n'y a pas là d'absolu (rien n'interdit de consiéderer des $a_n$ et des $b_n$ complexes.)*

Dans le **5.3.2**, on expose les principalement résultats à connaître. Les preuves les plus délicates sont développées dans le **5.3.3**.

#### 5.3.2. Principaux résultats

Etant donnée une fonction $f \in E_{2\pi}^0(\mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C})$, on sintéresse donc à des conditions suffisantes pour que la série de Fourier exponentielle (resp. trigonométrique)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_k(f)\mathrm{e}^{inx} \quad (\text{resp. } a_0(f) + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\,)$$

converge. On étudiera plusieurs modes de convergence dans les paragraphes suivants.

**Convergence en moyenne quadratique** Cette étude est motivée par les résultats du **5.2.1**. Citons d'abord une conséquenc immédiate du corollaire 5.16.

**Proposition 5.23.** *Pour tout $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$, la série des coefficients de fourier de $f$ est de carré sommable. De plus on a* l'inégalité de Bessel

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

**Preuve**. En effet, selon l'inégalité de Bessel (5.3), la suite $n \mapsto \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$ est croissante majorée, donc convergente et sa somme $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ est majorée par $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$.□

Comme la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ est à coefficients positifs, le fait qu'elle soit convergente entraîne que chacune des séries $\sum_{k\geq 0} |c_k(f)|^2$ et $\sum_{k\geq 1} |c_{-k}(f)|^2$ est convergente (voir remarque 5.10).

La proposition 5.23 est améliorée par le théorème suivant.

**Théorème 5.24.**
*(i) Le sous espace vectoriel de $E_{2\pi}(\mathbb{C})$ engendré par la famille $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $E_{2\pi}(\mathbb{C})$.*
*(ii) Soit $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$. La série des coefficients de fourier de $f$ est de carré sommable. De plus on a* l'égalité de Parseval-Bessel

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

*(iii) Soit $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$. La série des coefficients de fourier de $f$ converge en moyenne quadratique vers $f$. Autrement dit*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{ikt} - f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = 0.$$

*(iv) Soit $f,\ g \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$. On dispose de l'identité*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{c_k(f)} c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Les assertions (i) à (iv) sont des équivalences. Elles traduisent le fait que la famille $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est *une base hilbertienne* de $E_{2\pi}(\mathbb{C})$.

Nous montrerons le (i) (résultat le plus difficile) dans le **5.3.3**. Ici, nous vérifions les équivalences entre (i), (ii), (iii) et (iv). L'inégalité fondamentale est la relation de pythagore (5.4), que nous réécrivons sous la forme

$$\underbrace{\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2}_{\|S_n(f)\|_2^2} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{ikt} - f(t)\right|^2 \mathrm{d}t}_{\|f-S_n(f)\|_2^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \|f\|^2 . \quad (5.6)$$

[(i) ⇒ (ii)] Soit $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe, selon (i), un polynôme trigonométrique $p$, c'est-à-dire un entier $N$ et une famille $(\alpha_k)_{|k|\leq n}$ avec $p = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k \mathrm{e}_k \in E_{2\pi,N}(\mathbb{C})$, tels que $\|f - k\|_2 < \varepsilon$. Selon le corollaire 5.16, on a

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|p - f\|_2$$

D'où $\|f - S_N(f)\| < \varepsilon$. De plus, pour tout $n \geq N$, on a $\|S_n(f)\|^2 \geq \|S_N(f)\|^2$ et, d'après (5.6), $\|f - S_n(f)\| \leq \|f - S_N(f)\|$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $\|f - S_N(f)\| < \varepsilon$. La suite $\|f - S_N(f)\|$ tend donc vers 0 et $\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$ converge vers $\|f\|^2$.

[(ii) ⇒ (i)] Soit $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$. Sous l'hypothèse (ii), la suite $\|f - S_n(f)\|_2$ converge vers 0, d'après la relation (5.6). Ainsi, il existe une suite de polynômes trigonométriques tendant vers $f$, prouvant (i).

[(ii) ⇔ (iii)] Soit $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$. L'équivalence entre (ii) et (iii) se ramène à vérifier que $\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|^2 = 0$, ce qui est vrai d'après la relation (5.6) ci-dessus.

[(ii) ⇒ (iv)] On a clairement [(iv) ⇒ (ii)] en faisant $g := f$.

[(ii) $\Rightarrow$ (iv)] Soit $f,\ g \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(f)} c_k(g) = \langle S_n(f), S_n(g)\rangle$ ; on remarque également que, pour $f_{1,n} = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|\, \mathrm{e}^{ikt}$ et $g_{1,n} = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(g)|\, \mathrm{e}^{ikt}$, on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|\, |c_k(g)| \leq \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \sum_{k=-n}^{n} |c_k(g)|^2 .$$

D'après (ii) le membre de droite de l'inégalité précédente est majoré par $\|f\|^2 \|g\|^2$. Ainsi, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|\, |c_k(g)|$ est convergente, donc la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(f)} c_k(g)$ l'est absolument. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\langle S_n(f), S_n(g) - g\rangle = 0$, puisque $S_n(g) - g$ est orthogonal à $S_n(f)$. D'où $\langle S_n(f), S_n(g)\rangle = \langle S_n(f), g\rangle$ et

$$|\langle S_n(f), S_n(g)\rangle - \langle f, g\rangle| = |\langle S_n(f), g\rangle - \langle f, g\rangle| = |\langle S_n(f) - f, g\rangle| \leq \|S_n(f) - f\|_2 \|g\|_2 .$$

Or, d'après (iii) (qui est vrai, puisque (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)), on a $\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \langle S_n(f), S_n(g)\rangle = \langle f, g\rangle$.□

Le théorème 5.24 peut être traduit (exercice laissé au lecteur) en termes de séries trigonométriques).

**Théorème 5.25.**
*(i) la famille*

$$x \to 1 , \quad x \to \sqrt{2}\cos nx \ (n \in \mathbb{N}^*) , \quad x \to \sqrt{2}\sin nx \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

*est une base hilbertienne de $E_{2\pi}(\mathbb{C})$, au sens où le sous espace vectoriel de $E_{2\pi}(\mathbb{C})$ qu'elle engendré est dense dans $E_{2\pi}(\mathbb{C})$.*
*(ii) Soit $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$. La série des coefficients de fourier trigonmétrique de $f$ est de carré sommable. De plus on a* l'égalité de Parseval-Bessel

$$|a_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Les théorèmes 5.24 et 5.25 ont une importante conséquence.

**Corollaire 5.26.** *Soit $f \in E_{2\pi}^0(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients de Fourier exponentiels) (resp. trigonométriques) sont nuls. Alors, $f$ est l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.*

**Preuve**. En effet, l'identité de Parseval-Bessel entraîne que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0$. Comme $f$ est continue par hypothèse, on en déduit que $f$ est nulle sur $[-\pi, \pi]$ et, par périodicité, sur $\mathbb{R}$.□

**Corollaire 5.27.** *Soit $f \in E_{2\pi}^0(\mathbb{C})$ dont la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Alors $f$ est somme de sa série de Fourier.*

**Preuve**. En effet, le théorème 3.10 montre que la somme de la série de Fourier est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On constate facilement que ses coefficients de Fourier sont ceux de $f$. En appliquant le corollaire 5.26 à la différence entre $f$ et la somme de sa série de Fourier, on obtient le résultat.□

**Convergence simple des séries de Fourier** Nous baserons le théorème principal sur le lemme suivant, démontré dans le **5.3.3**.

**Lemme 5.28.** *Soit $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, telle que $f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ et $f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existent. On suppose que la fonction*

$$\varphi : \begin{cases} ]-\infty, x_0] & \to & \mathbb{C} \\ x_0 & \mapsto & f(x_0^-) \\ x < x_0 & \mapsto & f(x) \end{cases} \qquad \left(\text{resp. } \psi : \begin{cases} [x_0, +\infty[ & \to & \mathbb{C} \\ x_0 & \mapsto & f(x_0^+) \\ x > x_0 & \mapsto & f(x) \end{cases} \right)$$

*est dérivable à gauche (resp. à droite) en $x_0$. Alors la série de Fourier de $f$ converge en $x_0$ vers*

$$\frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right).$$

**Définition 5.29.** *On dit qu'une fonction $f$ vérifie les* conditions de Dirichlet *si*
*(i) $f$ est $2\pi$-périodique,*
*(ii) $f$ est continue par morceaux,*
*(iii) $f$ est dérivable par morceaux, au sens suivant :*
*il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de l'intervalle $[0,2\pi]$ telle que, pour tout $i\in\{0,\ldots,n-1\}$, la fonction $f_{|\,]x_i,x_{i+1}[}$ se prolonge par continuité en une application dérivable sur $[x_i,x_{i+1}]$.*

Dans la définition précédente et de manière plus précise, on demande, pour tout $i\in\{0,\ldots,n-1\}$, que le prolongement par continuité $g_i$ de $f_{|\,]x_i,x_{i+1}[}$ à $[x_i,x_{i+1}]$ soit une fonction dérivable sur $]x_i,x_{i+1}[$ qui admet en $x_i$ (resp $x_{i+1}$) une dérivée à droite (resp. gauche).

**Théorème 5.30.** *Soit $f\in E_{2\pi}(\mathbb{C})$, vérifiant les conditions de Dirichlet. Alors, en tout point $x\in\mathbb{R}$, la série de Fourier de $f$ converge vers*

$$\frac{1}{2}\left(f\left(x^-\right)+f\left(x^+\right)\right).$$

*En particulier, aux points $x$ où $f$ est continue, la série de Fourier de $f$ converge vers $f(x)$.*

Montrons que le lemme 5.28 entraîne le théorème 5.30. En effet, soit $f$ comme dans le théorème et $x_0\in\mathbb{R}$. En $x_0$, la fonction $\varphi$ (resp. $\psi$) correspondante existe, en raison de l'existence des limites unilatérales (liée à la continuité par morceaux, hypothèse*(ii)*). De plus $\varphi$ (resp. $\psi$) est dérivable à gauche (resp. à droite) en $x_0$, grace à l'hyothèse *(iii)* de dérivabilité par morceaux. Le lemme 5.28 entraîne alors la conclusion, la dernière assertion venant des égalités $f\left(x^-\right)=f\left(x^+\right)=f(x)$ aux points de continuité.□

**Convergence uniforme et normale de séries de Fourier**

**Définition 5.31.** *(fonction périodique de classe $C^1$ par morceaux) On dit que $f\in C^0_T(\mathbb{K})$ est de classe $C^1$ par morceaux, s'il existe une subdivision $(x_j)_{0\leq j\leq n}$ de l'intervalle $[0,T]$ telle que, pour tout $j\in\{0,\ldots,n-1\}$, la fonction $g_j=f_{|[x_j,x_{j+1}]}$ est de classe $C^1$ sur $[x_j,x_{j+1}]$, au sens suivant :*
*(i) $g_{j\,|]x_j,x_{j+1}[}$ est de classe $C^1$,*
*(ii) La fonction $g_j$ est dérivable à droite en $x_j$, à gauche en $x_{j+1}$ et la fonction dérivée obtenue en prolongeant $g'_j$ en $x_j$ par $g'_j(x_j)=g'_j({x_j}^+)$ et en $x_{j+1}$ par $g'_j(x_{j+1})=g'({x_{j+1}}^-)$ est continue sur $[x_j,x_{j+1}]$.*
*On note $E^1_T(\mathbb{K})$ le sous ensemble de $E_T(\mathbb{K})$ constitué des fonctions de classe $C^1$ par morceaux.*

**Remarque 5.32.** *Le (ii) peut être remplacé par la formulation plus simple :*
*(iii) pour tout $j\in\{0,\ldots,n-1\}$, les limites à droite en $x_j$ (resp. à gauche en $x_{j+1}$) de la dérivée de $f_{|]x_j,x_{j+1}[}$ existent.*

**Exercice 13.** *Démontrer l'équivalence des assertions (ii) et (iii) ci-dessus. (Pour le [(iii) $\Rightarrow$ (ii)], on notera que l'hypothèse de continuité de $f$ en $x_j$ (ou en $x_{j+1}$) est fondamentale. On utilisera l'égalité des accroissements finis.)*

On remarque que la dérivée d'une fonction $f\in E^1_T(\mathbb{K})$ est une fonction définie sauf en un nombre fini de points par période. En un tel point $x\in\mathbb{R}$, on décide, par convention et en référence aux résultats précédents, de poser

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(f'(x^-)+f'(x^+)\right).$$

Alors $f'$ est définie sur $\mathbb{R}$, localement Riemann intégrable, continue par morceaux et $2\pi$-périodique. Elle appartient à $E^0_T(\mathbb{K})$.
On a les inclusions suivantes entre les espaces introduits plus hauts (elles sont symbolisées par les flèches)

$$\mathrm{C}^1_T(\mathbb{K})\quad\longrightarrow\quad E^1_T(\mathbb{K})\quad\longrightarrow\quad \mathrm{C}^0_T(\mathbb{K})\quad\longrightarrow\quad E^0_T(\mathbb{K})\quad\longrightarrow\quad E_T(\mathbb{K})\quad.$$

On peut maintenant énoncer le résultat principal.

**Théorème 5.33.** *Soit $f\in E_{2\pi}(\mathbb{C})$, continue et de classe $C^1$ par morceaux. La suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers $f$ sur $\mathbb{R}$.*

**Preuve**. Nous commencons par établir le lemme suivant.

**Lemme 5.34.** *Soit $f \in E_T^1(\mathbb{K})$ et $h = f' \in E_T^0(\mathbb{K})$, sa dérivée au sens donné ci-dessus. On a*

$$\forall p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad c_p(h) = ipc_p(f).$$

En effet, considérons une subdivisison $(x_j)_{0 \leq j \leq k}$ de $[0, 2\pi]$ telle que, pour $0 \leq j \leq k$, $g_j = f_{|[x_j, x_{j+1}]}$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[x_j, x_{j+1}]$ au sens donné dans la définition 5.31. On a

$$c_p(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \, \mathrm{e}^{-ipt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g_j'(t) \, \mathrm{e}^{-ipt} \, \mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} g_j'(t) \, \mathrm{e}^{-ipt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} [g_j(t)]_{x_j}^{x_{j+1}} + \frac{ip}{2\pi} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g_j(t) \, \mathrm{e}^{-ipt} \, \mathrm{d}t.$$

par intégration par partie, possible puisque $g_j$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[x_j, x_{j+1}]$. Comme $g_j = f_{|[x_j, x_{j+1}]}$ il vient

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} g_j'(t) \, \mathrm{e}^{-ipt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} [f(t)]_{x_j}^{x_{j+1}} + \frac{ip}{2\pi} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) \, \mathrm{e}^{-ipt} \, \mathrm{d}t,$$

puis

$$\begin{aligned} c_p(h) &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} [f(t)]_{x_j}^{x_{j+1}}}_{=[f(t)]_0^{2\pi}=0} + \frac{ip}{2\pi} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) \, \mathrm{e}^{-ipt} \, \mathrm{d}t \\ &= ip \int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{-ipt} \, \mathrm{d}t. \square \end{aligned}$$

Revenons à la preuve du théoreme 5.33. Soit $f \in E_T^1(\mathbb{K})$. D'après la proposition 5.23, et avec les notations du lemme 5.34, les séries $\sum_{p \geq 0} |c_p(h)|^2$ et $\sum_{p \geq 1} |c_{-p}(h)|^2$ sot convergente, puisque $h \in E_T^0(\mathbb{K})$. Or, d'après le lemme 5.34, $|c_p(f)| = |c_p(h)|/p$, pour tout $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Comme $(|c_p(h)| - 1/p)^2 \geq 0$, on en déduit

$$|c_p(f)| \leq \frac{1}{2} \left( |c_p(h)|^2 + \frac{1}{p^2} \right)$$

Ainsi, par comparaison, les séries $\sum_{p \geq 0} |c_p(f)|$ et $\sum_{p \geq 1} |c_{-p}(f)|$ sont convergentes. A fortiori, la série $\sum_{p \in \mathbb{Z}} |c_p(f)|$ converge, entraînant la convergence normale de la série $\sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f) \, \mathrm{e}_p$.$\square$

### 5.3.3. Preuve des théorèmes

**Convergence simple des séries de Fourier** Nous démontrons en fait la proposition suivante, dont il est inutile de retenir l'énoncé précis dans le cadre de la préparation au CAPES.

**Proposition 5.35.** *Soit $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, telle que $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ et $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existent. On suppose de plus qu'il existe un intervalle $V$, voisinage $0$, tel que la fonction*

$$g : t \mapsto \frac{1}{t} \left( f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0^+) - f(x_0^-) \right)$$

*soit bornée sur $V \setminus \{0\}$. Alors la série de Fourier de $f$ converge en $x_0$ vers*

$$\frac{1}{2} \left( f(x_0^-) + f(x_0^+) \right).$$

**Preuve**. Comme $f$ est $2\pi$-périodique, on peut écrire ses coefficients de Fourier sous la forme

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0 - \pi}^{x_0 + \pi} f(x) \, \mathrm{e}^{-ikx} \, \mathrm{d}x \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$R_n(x_0) = S_n(f)(x_0) - \frac{1}{2} \left( f(x_0^+) + f(x_0^-) \right).$$

On a

$$S_n(f)(x_0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{ikx_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x) \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ik(x-x_0)}}_{K_n(x-x_0)} \mathrm{d}x \tag{5.7}$$

Or

$$K_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt} = \mathrm{e}^{-int} \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{e}^{ikt} \tag{5.8a}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{-int}\dfrac{1-\mathrm{e}^{i(2n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-i(n+1/2)t}-\mathrm{e}^{i(n+1/2)t}}{\mathrm{e}^{-(i/2)t}-\mathrm{e}^{(i/2)t}} = \dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} \text{ si } t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 \text{ si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.8b}$$

On vérifie facilement que la fonction $K_n$ est $2\pi$-périodique, paire continue. En remplacant dans (5.7), il vient

$$2\pi S_n(f)(x_0) = \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x) K_n(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t) K_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

en effectuant le changement de variable $h := t - x_0$. D'où

$$\begin{aligned} 2\pi S_n(f)(x_0) &= \int_{-\pi}^{0} f(x_0-t) K_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} f(x_0-t) K_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\pi} f(x_0+t) K_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} f(x_0-t) K_n(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

puisque $K_n$ est paire. Comme $\int_0^\pi K_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (on le vérifie facilement à partir de (5.8a)), on a

$$\begin{aligned} 2\pi R_n(x_0) &= 2\pi S_n(f)(x_0) - \pi\left(f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)\right) \\ &= \int_0^\pi \left(f(x_0+t) - f\left(x_0^+\right) + f(x_0-t) - f\left(x_0^-\right)\right) K_n(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.9}$$

On définit alors $\psi : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ par

$$\psi(t) = \frac{\left(f(x_0+t) - f\left(x_0^+\right) + f(x_0-t) - f\left(x_0^-\right)\right)}{\sin(t/2)} \text{ si } t \in \left]0,\pi\right] \text{ et } \psi(0) = 0.$$

En utilisant l'expression (5.8b)) pour $K_n$, il vient

$$2\pi R_n(x_0) = \int_0^\pi \psi(t) \sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t, \tag{5.10}$$

puisque les fonctions sous le signe intégral dans (5.9) et (5.10) ne diffère que par leur valeur en 0.

On écrit $\psi(t) = \frac{t}{\sin(t/2)}\frac{g(t)}{t}$, pour $t \in \left]0,\pi\right]$. Par hypothèse, $t \mapsto g(t)/t$ est bornée au voisinage de 0. Par ailleurs, on a $\lim_{t\to 0} t/\sin(t/2) = 0$. Ainsi, la fonction $\psi$ est bornée au voisinage de 0. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\psi_{|\,[0,\alpha]}$ soit bornée. En putre, $\psi$ est localement intégrable sur $\left]0,\pi\right]$, donc en particulier intégrable sur $[\alpha,\pi]$, où elle est bornée (par définition de l'intagrale de riemann). Ainsi $\psi$ est bornée sur $[0,\pi]$ et localement intégrable sur $\left]0,\pi\right]$, donc intégrable sur $[0,\pi]$. On peut alors effectuer le changement de variable $t = 2u$ dans (5.10), pour obtenir

$$2\pi R_n(x_0) = 2\int_0^{\pi/2} \psi(2u) \sin(2n+1)u\,\mathrm{d}u.$$

Or :

**Lemme 5.36.** *Soit* $\Psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ *intégrable. On a* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \psi(u) \exp nu\,\mathrm{d}u = 0$.

La démonstration de ce lemme est proposée en exercice ci-dessous. En l'appliquant avec $\Psi(\cdot) = \psi(2\cdot)$, $[a,b] = [0,\pi/2]$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} R_n(x_0) = 0$. □

La proposition 5.35 entraîne immédiatement le lemme 5.28. En effet, avec les notations du lemme 5.28, si la fonction $\varphi$ (resp. $\psi$) est dérivable à gauche (resp. à droite) en $x_0$, on a,

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{t} f(x_0+t) - f\left(x_0^+\right)\right) = \psi'(x_0^+) \qquad \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(f(x_0-t) - f\left(x_0^-\right)\right) = -\varphi'(x_0^-)$$

Ainsi, $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ existe, et $g$ est bornée sur un intervalle $]0, \alpha[$, $\alpha > 0$. On démontre de même que $g$ est bornée sur un intervalle $]\beta, 0[$, $\beta < 0$. En conclusion, $g$ est bornée sur $]\beta, \alpha[\setminus\{0\}$.

**Exercice 14.**
*(i) Démontrer que le lemme 5.36 est vraie pour une fonction constante. En déduire qu'il est vrai pour toute fonction $\chi$ en escalier sur $[a, b]$.*
*(ii) Soit $\Psi : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut construire une fonction $\chi$ en escalier (donc intégrable) telle que $\int_a^b |\Psi(u) - \chi(u)|\, \mathrm{d}u < \varepsilon$. (On peut utiliser le critère d'intégrabilité faisant intervenir les sommes de Riemann).*
*(iii) En déduire le lemme.*

**Densité du sous espace vectoriel engendré par la famille $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $E_{2\pi}(\mathbb{C})$** Nous donnons ici une démonstration utilisant des outils élémentaires, essentiellement liés à l'intégrale de Riemann. On montre d'abord du lemme suivant.

**Lemme 5.37.** *L'espace des fonctions continues $2\pi$-périodiques, affines par morceaux sur chaque période est dense dans $E_{2\pi}(\mathbb{C})$.*

**Preuve**. Soit $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il suffit de construire une fonction $h$, $2\pi$-périodique, continue et affine par morceaux, telle que

$$h(-\pi) = h(\pi) = f(\pi) \ ; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - h(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon^2.$$

Posons $M = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$. Soit $\delta > 0$. Selon une méthode analogue à celle proposée dans l'exercice 14, on peut trouver une application en escalier $\chi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ (donc intégrable) telle que

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - \chi(x)| \leq M \ ; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \chi(x)| \,\mathrm{d}x < \eta. \tag{5.11}$$

On remarque que

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |\chi(x)| \leq 2M.$$

Quitte à modifier la fonction donnée par le procédé de l'exercice 14, on peut supposer que

$$\chi(-\pi) = \chi(\pi) = f(\pi).$$

A partir de $\chi$, on peut construire une application $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ continue et affine par morceaux telle que

$$g(-\pi) = g(\pi) = f(\pi), \qquad \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x)| \leq \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |\chi(x)| \leq 2M$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} |\chi(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x < \eta. \tag{5.12}$$

(La preuve est laissée en exercice : on modifie $\chi$ au voisinage de ses points de discontinuités, de sorte que la condition (5.12) soit satisfaite. On peut même choisir $g$ beaucoup plus régulière qu'affine par morceaux.)
En utilisant, pour $x \in [-\pi, \pi]$, la relation

$$|f(x) - g(x)|^2 \leq |f(x) + g(x)| \, |f(x) - g(x)| \leq (|f(x)| + |g(x)|) \, |f(x) - g(x)| < 3M \, |f(x) - g(x)| ,$$

il vient

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq 3M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x < 6M\delta,$$

après utilisation de l'inégalité triangulaire et des relations (5.11) et (5.12).
On considère alors une fonction $g$ construite pour un $\delta$ tel que $0 < 6M\delta < \varepsilon^2$. La fonction $h$ définie comme étant la fonction $2\pi$-périodique coïncidant avec $g$ sur $[-\pi, \pi]$ répond à la question.□

Montrons maintenant que le sous espace vectoriel de $E_{2\pi}(\mathbb{C})$ engendré par la famille $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $E_{2\pi}(\mathbb{C})$. Soit donc $f \in E_{2\pi}(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 5.37, il existe $h$ est $2\pi$-périodique continue et affine par morceaux telle que

$$\|f - h\|_2 < \varepsilon/2. \tag{5.13}$$

Comme $h$ est $2\pi$-périodique continue et affine par morceaux, elle est de classe $C^1$ par morceaux au sens de la définition 5.31. Ainsi, sa série de Fourier converge normalement : il existe $n > 0$ tel que

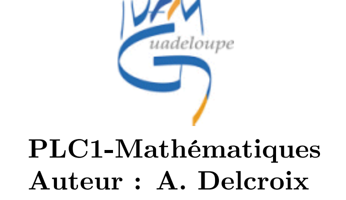
$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |h(x) - S_n(f)(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x) - S_n(f)(x)| = \|h - S_n(f)\|_\infty < \varepsilon/2.$$

D'où

$$\|h - S_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - S_n(f)(x)|^2 \, dx < \varepsilon^2/4. \quad (5.14)$$

La semi-norme $\|\cdot\|_2$ (nous travaillons ici dans l'espace $E_{2\pi}(\mathbb{C})$) vérifie l'inégalité triangulaire. Il résulte donc de (5.13) et (5.14) que

$$\|f - S_n(f)\|_2 < \varepsilon.\square$$




**PLC1-Mathématiques**
**Auteur : A. Delcroix**

# Equations différentielles

## 1 Généralités

Dans l'ensemble de ce cours, *tous les intervalles réels considérées seront supposés d'intérieur non vide* sans que cela soit explicitement rappelé à chaque fois.

### 1.1 Notion d'équation différentielle et de solution

Soit $E$ et $E'$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) normés.

**Définition 1.1** *Soit $U$ une partie de $\mathbb{R} \times E^{n+1}$ et $g : U \to E'$ une application.*
*(a) On appelle* solution *de l'*équation différentielle

$$g\left(t, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (ED')$$

*toute application $\varphi : I \to E$ ($I$ est un intervalle réel ouvert non vide) telle que*

$$\left.\begin{array}{l} (i)\ \text{La fonction } \varphi \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I, \\ (ii)\ \forall t \in I, \quad \left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\right) \in U, \\ (iii)\ \forall t \in I, \quad g\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\right) = 0. \end{array}\right\} \qquad (Sol')$$

*(b) L'entier $n$ s'appelle* l'ordre *de l'équation différentielle $(ED')$.*

**Définition 1.2** *Lorsque la fonction $g$ ne dépend pas de $t$, on dit que l'équation différentielle $(ED')$ est* autonome.

Ce vocabulaire vient du fait que la variable réelle $t$ représente souvent le temps dans les applications physique. On remarque qu'alors $g$ est définie sur une partie $U$ de la forme $U = \mathbb{R} \times U'$, avec $U' \subset E^n$ avec $g(t, y, y_1, \dots, y_n) = h(y, y_1, \dots, y_n)$ où $h$ est définie sur $U'$.

Dans la suite de ce cours, les équations différentielles auront une forme plus simple, décrite dans la définition suivante.

**Définition 1.3** *L'équation différentielle $(ED')$ est dite* résolue en $y^{(n)}$, *ou bien écrite* sous forme canonique *si $E' = E$ et s'il existe une partie $V$ de $\mathbb{R} \times E^n$ et une application $f : V \to E$ telle que $g$ soit définie sur $U = V \times E$ par*

$$\forall (t, y, y_1, \dots, y_n) \in V \times E, \qquad g(t, y, y_1, \dots, y_n) = f(t, y, y_1, \dots, y_{n-1}) - y_n.$$

On note alors l'équation différentielle $(ED')$ sous la forme

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (ED)$$

Une application $\varphi : I \to E$ ($I$ est un intervalle réel ouvert non vide) est solution de l'équation différentielle $(ED)$ si, et seulement si,

$$\left.\begin{array}{l} (i)\ \text{La fonction } \varphi \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I, \\ (ii)\ \forall t \in I, \quad \left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\right) \in V, \\ (iii)\ \forall t \in I, \quad \varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\right). \end{array}\right\} \qquad (Sol)$$

On peut se ramener souvent du moins localement, à une équation différentielle résolue, selon le 1.2.1 ci-dessous.

De plus, dans la suite de ce cours, on aura le plus souvent $E = \mathbb{R}^d$, $E' = \mathbb{R}^{d'}$ ($(d, d') \in \mathbb{N}^2$). Le plus souvent, les entiers $d$ et $d'$ seront petits. (Par exemple égaux à 1.) On introduit le vocalubaire suivant :

– Lorsque $E = \mathbb{R}$ (id est $d = 1$), l'équation différentielle $(ED)$ est dite équation différentielle *scalaire*.

– Lorsque $E = \mathbb{R}^d$ (resp. $E$ s'écrit comme produit de $d$ espaces de Banach $E_i$, $1 \leq i \leq d$), on parle de *système différentiel* de rang $d$ et d'ordre $n$. (Ce vocabulaire est cependant surtout employé pour le cas de l'ordre 1.)

On peut alors expliciter les composantes $f$ et de $\varphi$. Par exemple, pour cette dernière, on écrira

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^d \text{ (resp. } \textstyle\prod_{i=1}^d E_i), \quad t \mapsto (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t)).$$

L'équation différentielle $(ED)$ (ou plutôt le $(iii)$ des conditions $(Sol)$) s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} \varphi_1^{(n)}(t) & = & f_1\left(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t) ; \ldots\ldots ; \varphi_1^{(n-1)}(t), \ldots, \varphi_d^{(n-1)}(t)\right) \\ \quad\vdots & \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ \varphi_d^{(n)}(t) & = & f_d\left(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t) ; \ldots\ldots ; \varphi_1^{(n-1)}(t), \ldots, \varphi_d^{(n-1)}(t)\right) \end{cases}$$

**Remarque 1.1** ***(Solution sur des intervalles fermés)*** *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$.*

(1) *Soit $\varphi : [a, b] \to E$ une fonction*

*– On dit que $\varphi$ est* dérivable sur $[a, b]$ *si $\varphi\big|_{]a,b[}$ est dérivable et si $\varphi$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en $a$ (resp. $b$). On appelle fonction dérivée de $\varphi$ l'application de $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\psi\big|_{]a,b[} = \left(\varphi\big|_{]a,b[}\right)' \;, \quad \psi(a) = \varphi'\left(a^+\right) \;, \quad \psi(b) = \varphi'\left(b^-\right).$$

*On la note $\varphi'$.*

*– Soit $p$ un entier strictement supérieur à 1. On dit que $\varphi$ est $p$ fois dérivable sur $[a, b]$ si $\varphi$ est dérivable sur $[a, b]$ au sens défini ci-dessus, et si $\varphi', \ldots, \varphi^{(p-1)}$ définies succesivement par récurrence sont dérivables sur $[a, b]$ au sens défini ci-dessus.*

(2) *On dit qu'une fonction $\varphi : [a, b] \to E$ est solution de l'E.D. (ED) si*

$$\left.\begin{array}{l} (i_\sharp) \;\; \varphi \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } [a, b] \text{ au sens du (1) ci-dessus,} \\ (ii_\sharp) \;\; \forall t \in [a, b], \quad \left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\right) \in V, \\ (iii_\sharp) \;\; \forall t \in [a, b], \quad \varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\right). \end{array}\right\} \qquad (Sol_\sharp)$$

*On laisse au lecteur le soin de définir des solutions sur des intervalles semi-fermés. On rappelle que, comme le mentionne la remarque liminaire, on envisage dans ce cours que des solutions d'équations différentielles définies sur des intervalles non triviaux, id est d'intérieur non vide.*

## 1.2 Quelques transformations sur les équations différentielles

Avant d'aborder, dans la section 2, les questions centrales d'existence et d'unicité de solution vérifiant des conditions données, on va montrer dans les sous sections suivantes que :

(1.2.1) : on peut ramener une équation différentielle suffisamment régulière à une équation résolue, au moins localement,

(1.2.2) : on peut toujours ramener l'étude d'une équation différentielle sous forme canonique d'ordre $n > 1$ à celle d'une équation différentielle d'ordre 1,

(1.2.3) : on peut toujours ramener l'étude d'une équation différentielle sous forme canonique générale à une équation différentielle autonome.

Ainsi, en théorie, on peut ramener localement l'étude de toute équation différentielle assez régulière à celle d'une équation différentielle d'ordre 1 autonome, encore appelée un *champ de vecteurs* (voir le 1.2.4 ci-dessous.),

### 1.2.1 Mise sous forme résolue locale d'une équation différentielle quelconque

On utilise les notations précédentes, notamment celles de la définition 1.1. On suppose ici que $E$ est un espace complet, $E = E'$, $U$ une partie ouverte de $\mathbb{R} \times E^{n+1}$ et $g$ une application de classe au moins $\mathrm{C}^1$ sur $U$.

Soit $(\tau, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n) \in U$. On suppose que la différentielle partielle $D_{y_n} g(\tau, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ de $g$ par rapport à la variable $y_n$ au point $(\tau, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ est un isomorphisme linéaire de $E$. D'après le théorème

d'inversion locale, il existe un ouvert $U_1$ voisinage de $(\tau, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ dans $\mathbb{R} \times E^{n+1}$, un ouvert $V_1$ voisinage de $(\tau, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ dans $\mathbb{R} \times E^n$ et $f : V_1 \to E$, de même régularité que $g$ tels que, pour tout $(t, y, y_1, \ldots, y_n) \in U$,

$$(t, y, y_1, \ldots, y_n) \in U_1 \text{ et } g(t, y, y_1, \ldots, y_n) = 0$$
$$\Leftrightarrow (t, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in V_1 \text{ et } y_n = f(t, y, y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Soit $\varphi : I \to U$ une solution de l'équation différentielle $(ED')$ telle que $\varphi^{(i)}(\tau) = \eta_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots n\}$. On peut - quitte à la restreindre - supposer que $\varphi$ est à valeurs dans $U_1$. On vérifie alors que cette restriction vérifie $(Sol)$, ou l'on a remplacé $V$ par $V_1$. C'est donc une solution de l'E.D. $(ED)$, où l'on a remplacé $V$ par $V_1$. Réciproquement, il est clair qu'une solution de l'équation résolue est une solution de $(ED')$.

Ainsi, localement, on ramène l'étude de l'équation différentielle $(ED')$ à celle d'une équation sous forme canonique. Cependant, le lecteur pourra trouver des exemples où il n'y a pas équivalence entre l'équation différentielle $(ED')$ et une forme locale résolue.

### 1.2.2 Comment se ramener à une équation différentielle d'ordre 1 ?

Soit $V$ une partie de $\mathbb{R} \times E^n$ et $f$ une application de $V$ dans $E$. On définit $F : V \to E^n$ par

$$\forall (t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in V, \quad F(t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{1}$$

On notera $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ pour $Y \in E^n$.

**Proposition 1.4**
*(a) Pour toute solution $\varphi : I \to E$ de l'équation différentielle*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{$ED$}$$

*la fonction $\Phi : I \to E^n$ définie par $\Phi(t) = \left(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\right)$, pour tout $t \in I$, est solution de l'équation différentielle*

$$Y' = F(t, Y). \tag{$ED_S$}$$

*(b) Réciproquement, pour toute application $\Phi : I \to E^n$ avec $\Phi = (\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ solution de l'équation différentielle $(ED_S)$, la fonction $\varphi : I \to E$ est solution de l'équation différentielle $(ED)$.*
*En particulier, l'application $\varphi$ est $n$ fois dérivable avec*

$$\varphi' = \varphi_1 \ , \ldots, \ \varphi'' = \varphi_2 \ , \ldots, \ \varphi^{(n-1)} = \varphi_{n-1}.$$

**Remarque 1.2** *Ainsi, une solution $\Phi = (\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ de l'équation différentielle $(ED_S)$ est entièrement déterminée par la seule fonction $\varphi$.*

**Preuve**
$(a)$ Considérons $\varphi : I \to E$ solution de l'équation différentielle $(ED)$. L'application $\Phi$ est bien définie sur $I$ et dérivable, puisque $\varphi^{(n-1)}$ est dérivable. On a alors

$$\forall t \in I, \quad \Phi'(t) = \left(\varphi'(t), \varphi''(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)\right).$$

Comme $\varphi : I \to E$ solution de l'équation différentielle $(ED$, la fonction

$$t \mapsto (t, \Phi(t)) = \left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\right)$$

est à valeurs dans $V$. Ainsi $F(t, \Phi(t))$ est défini pour tout $t \in I$ . On a

$$\forall t \in I, \quad F(t, \Phi(t)) = \left(\varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t), f(t, \Phi(t))\right) = \left(\varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t), \varphi^{(n)}(t)\right) = \Phi'(t)$$

puisque $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \Phi(t))$. Ainsi $\Phi : I \to E$ est solution de l'équation différentielle $(ED_S)$.
$(b)$ Soit $\Phi : I \to E^n$ avec $\Phi(t) = (\varphi(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t))$ une solution de l'équation différentielle $(ED_S)$. On a donc, pour tout $t \in I$, $(t, \Phi(t)) \in V$ et

$$\forall t \in I \quad \Phi'(t) = F(t, \Phi(t)). \tag{2}$$

Compte tenu des définitions, l'égalité (2) s'écrit

$$\forall t \in I, \quad \left(\varphi'(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_{n-1}'(t)\right) = \left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t), f(t, \Phi(t)\right)$$

ce qui donne, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = \varphi_1(t) \ , \quad \varphi_1'(t) = \varphi_2(t) \ , \ldots, \ \varphi_{n-2}'(t) = \varphi_{n-1}(t) \ , \quad \varphi_{n-1}'(t) = f(t, \Phi(t))$$

et $\Phi = \left(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right)$. On en déduit que $\varphi$ est $n$ fois dérivable sur $I$, avec $\varphi^{(n)}(t) = \varphi_{n-1}'(t) = f(t, \Phi(t)$ pour tout $t \in I$. Ainsi $\varphi : I \to E$ est solution de l'équation différentielle $(ED)$.□

**Exemple 1.1** *Considérons l'équation différentielle*

$$y'' = y' + y^2 \tag{3}$$

*On appliquera dans la pratique la proposition 1.4 de la manière suivante. On pose $v = y'$. On a alors $v' = y'' = v + y^2$. Ainsi, l'équation différentielle (3) est équivalente, dans le sens donné par la proposition 1.4, à l'équation différentielle*

$$(y', v') = (v, v + y^2). \tag{4}$$

*On écrira souvent l'équation différentielle (4) sous la forme*

$$\begin{cases} y' = & v \\ v' = & v + y^2 \end{cases} . \tag{5}$$

*On dira qu'on a transformé l'équation différentielle (3) en le système différentiel (5).*

### 1.2.3 Passer d'une équation différentielle quelconque à une équation différentielle autonome

Compte tenu de la sous-section 1.2.2, on expose cette sous section pour une équation différentielle d'ordre 1. Soit $U$ une partie de $\mathbb{R} \times E$ et $f : U \to E$ une application. On considère l'équation différentielle

$$y' = f(t, y). \tag{$E1$}$$

On définit une application $g : U \times \mathbb{R} \to E \times \mathbb{R}$ par

$$g(y, v) = (f(v, y), 1)$$

et l'équation différentielle autonome

$$(y', v') = g(y, v). \tag{$C1$}$$

**Proposition 1.5**
*(a) Soit $\Phi : I \to U$ une solution de l'équation différentielle ($E1$). La fonction $\Psi : I \to U \times \mathbb{R}$ définie par $\Psi(t) = (\Phi(t), t)$, pour tout $t \in I$, est une solution de l'équation différentielle ($C1$).*
*(b) Réciproquement, soit $\Psi : I \to U \times \mathbb{R}$ avec $\Psi(t) = (\Phi(t), v(t))$, pour tout $t \in I$, une solution de l'équation différentielle ($C1$) telle que $v(0) = 0$. La fonction $\Phi : I \to U$ est solution de l'équation différentielle ($E1$).*

**Preuves**
*Preuve du* $(a)$.– On a, pour tout $t \in I$,

$$\Psi'(t) = (\Phi'(t), 1) = (F(t, \Phi(t)), 1) = g(\Phi(t), t) = g(\Psi(t)).$$

Ainsi, $\Psi$ est solution de l'équation différentielle $(C1)$.
*Preuve du* $(b)$.– Comme $\Psi(\cdot) = (\Phi(\cdot), v(\cdot))$ est solution de l'équation différentielle $(C1)$

$$\forall t \in I, \quad \Phi'(t) = F(v(t), \Phi(t)), \quad v'(t) = 1.$$

Puisque $v(0) = 0$, il vient $v(t) = t$. D'où : $\forall t \in I, \ \ \Phi'(t) = F(t, \Phi(t))$. Ainsi, $\Phi$ est solution de l'équation différentielle $(E1)$.

### 1.2.4 Champs de vecteurs

Une équation différentielle d'ordre 1 sous forme canonique et autonome est également appelé un *champ de vecteurs.* Un champ de vecteurs consiste donc dans la donnée d'une application $X$ définie sur un ouvert $\Omega$ de $E^n$ à valeurs dans $E^n$. Une application $\varphi : I \to E$ ($I$ est un intervalle réel ouvert non vide) est solution (ou *trajectoire*) du champ de vecteurs

$$y' = X(y)$$

si

$$\left.\begin{array}{l} (i) \text{ La fonction } \varphi \text{ est dérivable sur } I, \\ (ii_\flat)\ \ \forall t \in I, \quad \varphi(t) \in \Omega\ ; \qquad (iii_\flat)\ \ \forall t \in I, \quad \varphi'(t) = X(\varphi(t))\,. \end{array}\right\} \qquad (Sol_\flat)$$

# 2 Problèmes d'existence et d'unicité de solutions

*On écrit cette section pour les solutions définies sur des intervalles ouverts, ce qui simplifie légérement l'exposé des notions et les démonstrations des résultats.*

## 2.1 Problèmes locaux et globaux

On suppose donnée une équation différentielle

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (ED)$$

où $f$ est définie sur une partie ouverte $V$ de $\mathbb{R} \times E^n$ (Notations de la sous section 1.1).

On note que pour une solution $\varphi : I \to E$ est solution de l'équation différentielle $(ED)$, la valeur de $\varphi^{(n)}(t)$ est déterminée par $t$ et par les valeurs de $\varphi$, $\varphi'$, ..., $\varphi^{(n-1)}$ au point $t$. Ceci justifie la formulation des problèmes d'existence et d'unicité donnée ci-dessous.

### 2.1.1 Existence et unicité locales

**Définition 2.1** *On dit que l'équation différentielle possède la propriété* d'existence locale de solution *pour* $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in V$*, s'il existe un intervalle ouvert* $I$ *tel que* $t_0 \in I$ *et* $\varphi : I \to E$ *solution de l'équation différentielle (ED), c'est-à-dire vérifiant (Sol) et telle que de plus*

$$\varphi(t_0) = y_0\ , \quad \varphi'(t_0) = y_1\ , \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \qquad (CI)$$

**Définition 2.2** *Les conditions (CI) s'appellent des* conditions initiales *au point* $t_0$.

Chercher une solution de l'équation différentielle $(ED)$ satisfaisant de plus les conditions $(CI)$ s'appelle résoudre un *problème de Cauchy.* On notera souvent ce problème sous la forme

$$\left\{\begin{array}{c} y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(t_0) = y_0\ , \quad y'(t_0) = y_1\ , \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{array}\right. \qquad (PC)$$

**Définition 2.3** *On dit que l'équation différentielle possède la propriété* d'unicité locale des solutions *en* $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in V$*, si, pour tout couple de solutions de l'équation différentielle (ED)* $\varphi : I \to E$ *et* $\psi : J \to E$*, avec* $t_0 \in \mathring{I} \cap \mathring{J}$ *et*

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}\,, \quad \varphi^{(i)}(t_0) = \psi^{(i)}(t_0) = y_i,$$

*il existe un voisinage* $W$ *de* $t_0$ *inclus dans* $I \cap J$ *tel que* $\varphi|_W = \psi|_W$.

**Exemple 2.1** *On prend* $E = \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, définie par* $f(y) = y^{2/3}$*, pour tout* $y \in \mathbb{R}$*. On considère l'équation différentielle (autonome) d'ordre* 1 *suivante*

$$y' = f(y) = y^{2/3} \qquad (6)$$

*On vérifie (sans peine !) que la fonction nulle est une solution de l'équation différentielle (6), de plus solution du problème de Cauchy*

$$y' = y^{2/3}\ , \quad y(0) = 0. \qquad (7)$$

*On remarque (calcul immédiat) que, pour tout $c \in \mathbb{R}^+$, la fonction $\varphi_c$ définie par*

$$\varphi_{|]-\infty,c]} = 0, \quad \forall t \in ]c, +\infty[\,, \quad \varphi(t) = ((t-c)/3)^3$$

*est une autre solution du problème de Cauchy (7).*

*Ainsi ce problème possède la propriété d'existence (locale), mais pas celle d'unicité pour* $(t_0, y_0) = (0,0)$.

On dira que l'équation différentielle $(ED)$ possède la *propriété d'existence locale* (resp. *d'unicité locale*) en tout point (précision qui sera en général omise) si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in E^n$ tel que $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in V$, elle possède la propriété d'existence locale au sens de la définition 2.1 (resp. d'unicité locale au sens de la définition 2.3) en $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

### 2.1.2 Unicité globale et solution maximale

**Définition 2.4** *Soit $\varphi : I \to E$ et $\psi : J \to E$ deux solutions de l'équation différentielle (ED). On dit que $\psi$* prolonge *$\varphi$ (ou que $\psi$ est un* prolongement *de $\varphi$) si $I \subset J$ et si $\psi|_I = \varphi$.*

**Définition 2.5** *On appelle solution maximale de l'équation différentielle (ED), une solution $\varphi : I \to E$ qui ne possède pas de prolongement autre qu'elle même : si $J$ est un intervalle avec $I \subset J$ et $\psi : J \to E$ une solution de l'équation différentielle (ED) telle que $\psi|_I = \varphi$ alors $J = I$.*

On peut énoncer une première propriété (proposition 2.6) concernant les solutions maximales. Le résultat principal est le théorème 2.7.

**Proposition 2.6** *Toute solution de l'équation différentielle (ED) est la restriction d'une solution maximale.*

**Preuve**.– Soit $\varphi : I \to E$ une solution de l'équation différentielle $(ED)$ où $I$ est un intervalle ouvert. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de solutions de l'équation différentielle $(ED)$ prolongeant $\varphi$. La partie $\mathcal{P}$ est non vide, puisque $\varphi \in \mathcal{P}$, et partiellement ordonnée par la relation "$\psi_1$ prolonge $\psi_2$". Soit alors une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}$ totalement ordonnée qu'on peut écrire $\mathcal{T} = \{\varphi_\lambda : I_\lambda \to E, \ \ \lambda \in \Lambda\}$. Posons $J = \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$. L'ensemble $J$ est un ensemble ouvert, comme réunion d'intervalles ouverts. Montrons que $J$ est un intervalle. Soit $(t_1, t_2) \in J^2$. Il existe $\lambda_i \in \Lambda$ tel que $t_i \in I_{\lambda_i}$ $(i = 1,\ 2)$. Comme la partie $\mathcal{T}$ est totalement ordonnée, on a soit $I_{\lambda_1} \subset I_{\lambda_2}$ soit $I_{\lambda_2} \subset I_{\lambda_1}$. Si, par exemple, $I_{\lambda_1} \subset I_{\lambda_2}$ on a $t_1,\ t_2 \in I_{\lambda_2}$ et donc le segment d'extrémités $t_1$ et $t_2$ est inclus dans l'intervalle $I_{\lambda_2}$, donc dans $J$.

Montrons qu'on définit une application $\varphi : J \to E$ de la façon suivante : pour $t \in J$, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $t \in I_\lambda$ et on pose $\varphi(t) = \varphi_\lambda(t)$. En effet, s'il existe $\mu \in \Lambda$ tel que $t \in I_\mu$ on a soit $I_\lambda \subset I_\mu$ soit $I_\mu \subset I_\lambda$, puisque la partie $\mathcal{T}$ est totalement ordonnée. Supposons, par exemple, $I_\mu \subset I_\lambda$. Alors, par définition d'un prolongement, on a $\varphi_\lambda|_{I\mu} = \varphi_\mu$. Ainsi, $\varphi_\mu(t) = \varphi_\lambda(t)$, assurant la définition de $\varphi$.

Par ailleurs, $\varphi$ est $n$ fois dérivable sur $J$, la dérivabilité étant une propriété locale. (Le fait que tous les intervalles $I_\lambda$ soient ouverts permet d'assurer que $\varphi$ est $n$ fois dérivable sur leur réunion.) Enfin, $\varphi$ est solution de l'équation différentielle $(ED)$, les propriétés $(ii)$ et $(iii)$ de $(Sol)$ étant vérifiées en chaque point. L'application $\varphi : I \to E$ est donc un majorant de la partie $\mathcal{T}$. Ainsi, l'ordre sur $\mathcal{P}$ est inductif. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{P}$ possède un élément maximal. On vérifie facilement que cet élément maximal est une solution maximale de l'équation différentielle $(ED)$ au sens de la définition 2.5.□

La proposition précédente permettrait, en théorie, de toujours considérer une solution d'équation différentielle comme étant une solution maximale. On doit attirer cependant l'attention sur le fait qu'il n'y a pas forcément unicité : une solution donnée d'équation différentielle peut être restriction de plusieurs solutions maximales.

**Exemple 2.2** *(Suite de l'exemple 2.1) La fonction nulle et la fonction $\varphi_1$ définie par*

$$\varphi_1|_{\mathbb{R}_-} = 0\ ; \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_1(t) = ((t-1)/3)^3$$

*sont deux solutions manifestement maximales de l'équation différentielle (6). (Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ et ne peuvent donc être prolongées !) Elles ont même restriction à $\mathbb{R}_-$, qui est la fonction nulle de $\mathbb{R}_-$.*

**Théorème 2.7** *On suppose que l'équation différentielle (ED) possède les propriétés d'existence locale et d'unicité locale. Alors, pour tout* $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in V$*, le problème de cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{c} y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \\ y\left(t_0\right) = y_0\ , \quad y'\left(t_0\right) = y_1\ , \ldots,\ y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_{n-1}. \end{array} \right. \tag{PC}$$

*possède une unique solution maximale.*

Nous donnerons une démonstration complète de ce théorème totalement, indépendante de celle de la proposition 2.6, bien que l'existence d'une solution maximale pour le problème $(PC)$ en découle immédiatement. Nous voulons mettre en évidence que le fait que le problème de Cauchy $(PC)$ possède la propriété d'unicité locale simplifie l'argument d'existence de la solution maximale, en évitant le recours au lemme de Zorn.

Démontrons d'abord le lemme suivant, également important, de passage de *l'unicité locale à celle globale.*

**Lemme 2.8** *On suppose que l'équation différentielle (ED) possède la propriété d'unicité locale. Alors, elle possède une* propriété d'unicité globale *: deux solutions du problème de Cauchy (PC) sont égales sur l'intersection de leurs intervalles de définition.*

**Preuve du lemme 2.8.**– Soit $\varphi : I \to E$ et $\psi : J \to E$ deux solutions du problème de Cauchy $(PC)$. Soit $L = \left\{t \in I \cap J \,\middle|\, \varphi\left|_{[t_0,t]} = \psi\right|_{[t_0,t]} \right\}$. (On a convenu que $[t_0, t]$ est le segment d'extémités $t_0$ et $t$ qu'on ait $t_0 \leq t$ ou non.) Par construction, $L$ est un intervalle, voisinage de $t_0$. Supposons que $l = \sup L < \min(\sup I, \sup J)$, le membre de droite pouvant être égal à $+\infty$. On a $\varphi^{(i)}(l) = \psi^{(i)}(l)$, et $\left(l, \varphi(l), \ldots, \varphi^{(n-1)}(l)\right) \in V$. Comme l'équation différentielle $(ED)$ possède la propriété d'unicité locale, on a nécessairement $\varphi = \psi$ sur un voisinage de $l$, contredisant l'hypothèse faite sur $l$. C'est donc que $\sup L = \min(\sup I, \sup J)$ et de même $\inf L = \max(\inf I, \inf J)$. Ainsi $L = I \cap J$ et $\varphi|_{I\cap J} = \psi|_{I\cap J}$.□

**Preuve du théorème 2.7**
*Existence.*– Soit $(\varphi_\lambda : I_\lambda \to E)_{\lambda\in\Lambda}$ la famille des solutions du problème de Cauchy $(PC)$. Cette famille est non vide, car l'équation différentielle $(ED)$ possède la propriété d'existence locale. Remarquons que chaque intervalle $I_\lambda$ contient $t_0$ en son intérieur.
On pose $J = \cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, qui est un intervalle, comme réunion d'intervalles contenant tous $t_0$. Notons que, pour $(\lambda, \mu) \in \Lambda^2$, on a $\varphi_\lambda\left|_{I_\lambda\cap I_\mu} = \varphi_\mu\right|_{I_\lambda\cap I_\mu}$, en raison du lemme 2.8. Ceci entraîne qu'on peut définir une application $\varphi : I_\lambda \to E$ par : $\forall t \in I$, $\varphi(t) = \varphi_\lambda(t)$, où $\lambda$ est un indice tel que $t \in I_\lambda$. De plus, l'application $\varphi$ est $n$ fois dérivable. (En effet, $\varphi|_{I_\lambda} = \varphi_\lambda$ est $n$ fois dérivable, pour tout $\lambda \in \Lambda$. La dérivabilité étant une propriété locale, et les intervalles $I_\lambda$ étant ouverts, $\varphi$ est $n$ fois dérivable sur leur réunion.) De plus, par construction, les propriétés $(ii)$ et $(iii)$ de $(Sol)$ sont vérifiées en chaque $t \in J$. Ainsi, $\varphi$ est solution de l'équation différentielle $(ED)$. Enfin, $\varphi$ est bien solution du problème de Cauchy $(PC)$ puisque chaque $\varphi_\lambda$ vérifie les conditions initiales du problème de Cauchy $(PC)$. Par construction, cette solution est maximale.

*Unicité.*– Soit $\varphi : I \to E$ et $\psi : J \to E$ deux solutions maximales du problème de Cauchy $(PC)$. D'après le lemme 2.8, elles coïncident sur $I \cap J$ qui est non vide, puisque contenant $t_0$ en son intérieur. Si $\inf I < \inf J$ ou $\sup I < \sup J$ (resp. $\inf J < \inf I$ ou $\sup J < \sup I$), on pourrait prolonger strictement $\psi$ (resp. $\varphi$) ce qui contredirait sa maximalité. On a donc nécessairement $I = J$ et $\varphi = \psi$.□

## 2.2 Le cas localement lipschitzien : le théorème de Cauchy-Lipschitz

### 2.2.1 Définitions et premiers énoncés

Ce théorème figure au programme du CAPES, qui n'exige pas d'en connaître une démonstration. Cependant, le lecteur trouvera dans la sous section 2.2.2 les principales indications pour une preuve par un théorème de point fixe. Le lecteur est renvoyé aux cours classiques de L2/L3 pour des preuves complètes.

Soit $E$ et $E'$ des espaces normés, de normes notées respectivement $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$. Soit $V$ une partie ouverte de $\mathbb{R} \times E$ et $F$ une application de $V$ dans $E'$.

**Définition 2.9** *On dit que $F$ est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable (ou bien par rapport à la variable d'espace) si pour tout $(t, y) \in V$ il existe un réel $k > 0$, un intervalle $I$ voisinage de $t$ et un réel $r > 0$ tels que $I \times B(y, r) \subset V$ avec*

$$\forall \tau \in I, \quad \forall (\xi, \xi') \in B(y, r)^2, \quad \|F(\tau, \xi) - F(\tau, \xi')\|' \leq k \|\xi - \xi'\|.$$

Dans le cas où $E=\mathbb{R}^d$ ($d\in\mathbb{N}$, $d\geq 1$), $E'=\mathbb{R}^{d'}$ ($d'\in\mathbb{N}$, $d'\geq 1$) toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie. Une application localement lipschitzienne par rapport à un couple de normes l'est pour tous.

**Théorème 2.10** *Soit $E$ un espace normé, $V$ une partie ouverte de $\mathbb{R}\times E$ et $F$ une application de $V$ dans $E$. On suppose l'application $F$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Pour tout $(t_0,y_0)\in V$, le problème de Cauchy*

$$y'=F(t,y)\quad,\quad y(t_0)=y_0. \tag{PC}$$

*possède une unique solution maximale.*

Comme le lecteur le verra dans la section 2.2.2, on commence par établir un résultat d'existence et d'unicité locale, pour toute donnée de Cauchy $(t_0,y_0)\in V$. Le théorème 2.7 garantit alors l'existence et l'unicité d'une solution maximale solution du problème $(PC)$.

Le passage des équations différentielles d'ordre 1 aux équations diférentielles d'ordre $n$ se fait par la proposition 1.4 de la sous section 1.2.2. De manière plus précise, soit $E$ un espace normé. On munit l'espace $E^n$ de l'une des normes équivalentes suivantes

$$\|Y\|_\infty=\sup_{0\leq i\leq n-1}\|y_i\|\quad,\quad \|Y\|_1=\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}\|y_i\|\quad,\quad \|Y\|_2=\left(\sum_{i=0}^{n-1}\|y_i\|^2\right)^{1/2},$$

par exemple de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Soit $V$ une partie ouverte de $\mathbb{R}\times E^n$ et $f$ une application continue $V$ dans $E$, localement lipschitzienne par rapport aux variables $Y=(y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})\in E^n$, ce qui revient à : pout tout $(t,Y)\in V$, il existe un réel $k>0$, un intervalle $I$ voisinage de $t$ et un réel $r>0$ tels que $I\times B(Y,r)\subset V$ avec

$$\forall\tau\in I,\ \ \forall\left(\Xi=(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}),\ \Xi'=\left(\xi_0',\xi_1',\ldots,\xi_{n-1}'\right)\right)\in B(Y,r)^2,$$
$$\|f(\tau,\Xi)-f(\tau,\Xi')\|\leq k\|\Xi-\Xi'\|_\infty.$$

**Théorème 2.11** *Pour tout $(t_0,y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})\in V$, il existe un intervalle $J$ voisinage de $t$ et $\varphi:J\to E$ solution du problème de Cauchy*

$$y^{(n)}=f\left(t,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)\quad,\quad y^{(i)}(t_0)=y_i,\quad 0\leq i\leq n-1. \tag{PC}$$

*Il y a de plus unicité au sens du lemme 2.8, sous section 2.1.2.*

Ce théorème se déduit facilement du théorème 2.10. En effet, si $f$ est localement lipschitzienne par rapport aux variables $Y=(y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})\in E^n$, alors $F$ définie comme dans la proposition 1 est localement lipschitzienne au sens de la définition 2.9. Comme dans le cas du problème différentiel d'ordre 1, on en déduit le :

**Corollaire 2.12** *Avec les hypothèses du théorème et notations du théorème 2.11, le problème de Cauchy (PC) possède une unique solution maximale.*

La **preuve** est immédiate par application du théorème 2.7.

### 2.2.2 Compléments sur le théorème de Cauchy-Lipschitz

On se place dans le cadre général décrit ci-dessus et notamment celui de l'énoncé du théorème 2.10.

**Définition 2.13** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}\times E$, $F:U\to E$ une application et $(t_0,y_0)\in U$. On appelle* tonneau de sécurité *ouvert (resp. fermé) relatif à $F$ et à $(t_0,y_0)$ un voisinage ouvert (resp. fermé) de $(t_0,y_0)$ de la forme $I\times B$ où $I$ est un intervalle ouvert (resp. fermé) centré en $t_0$, de longueur $2l$ et $B$ une boule ouverte (resp. fermée), centrée en $x_0$, de rayon $r$ tel que*

$$I\times B\subset U,\quad \sup_{(t,y)\in I\times B}\|f(t,y)\|<r/l.$$

**Remarque 2.1** *L'intérêt des tonneaux de sécurité est le suivant.*
(*a*) *Supposons $F$ localement bornée, il existe un voisinage $W$ de $(t_0, y_0)$ et un réel $M > 0$ tels que*

$$\forall (t_0, y_0) \in W, \quad \sup_{(t,y)\in W} \|f(t,y)\| \leq M.$$

*Il existe alors $r > 0$ et $l > 0$ tels que $[t_0 - l, t_0 + l] \times B_F(y_0, r) \subset W$, par définition d'un voisinage. Quitte à réduire $l$, on peut supposer que $r/l \leq M$. Ainsi, pour tout $(t_0, y_0) \in U$, on peut trouver un tonneau de sécurité ouvert (resp. fermé) relatif à $F$ et à $(t_0, y_0)$.*
(*b*) *Supposons $F$ localement bornée. Soit alors $[t_0 - l, t_0 + l] \times B_F(y_0, r)$ un tonneau de sécurité associé à $F$ et à $(t_0, y_0)$. Supposons de plus qu'il existe une solution $\varphi : J \to E$ du problème de Cauchy (PC). Alors*

$$\forall t \in J \cap [t_0 - l, t_0 + l], \quad \|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| \leq r.$$

*En effet, on a*

$$\|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| \leq \sup_{\tau \in J\cap[t_0-l,t_0+l]} \|\varphi'(\tau)\| \, |t - t_0| = \sup_{\tau \in J\cap[t_0-l,t_0+l]} \|f(\tau, \varphi(\tau))\| \, |t - t_0| < r.$$

*Ainsi, l'image de la restriction $\varphi\big|_{J\cap[t_0-l,t_0+l]}$ reste contenue dans la boule $B_F(y_0, r)$.*

**Théorème 2.14** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $F : U \to E$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Soit $(t_0, y_0) \in U$. Il existe un tonneau de sécurité fermé $[t_0 - l, t_0 + l] \times B_F(y_0, r)$ inclus dans $U$ et une solution $\varphi$, définie sur $]t_0 - l, t_0 + l[$, du problème de Cauchy*

$$y' = F(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \qquad (PC)$$

*Il y a de plus unicité au sens du lemme 2.8, sous section 2.1.2.*

Plusieurs méthodes existent pour démontrer ce théorème. Nous donnons quelques indications pour le voir comme conséquence d'un théorème de point fixe de Picard. Voici le schéma.
(*a*) *L'existence du tonneau de sécurité* découle de la continuité de $F$ qui rend cette application localement borné. (Voir le (*a*), remarque 2.1.)
(*b*) *Equivalence avec un problème de point fixe* : posons $I_0 = ]t_0 - l, t_0 + l[$ et $\overline{I}_0 = [t_0 - l, t_0 + l]$.

**Lemme 2.15** *Soit $\varphi : I_0 \to U$ continue. Sont équivalentes :*
(*i*) *$\varphi$ est solution du problème (PC),*
(*ii*) *$\varphi$ est solution du problème intégral*

$$\forall t \in I_0, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s)) \, \mathrm{d}s.$$

Ainsi, une solution du problème $(PC)$ est un point fixe de l'application

$$\Phi : \mathrm{C}^0\left(\overline{I}_0, B_F(y_0, r)\right) \longrightarrow \mathrm{C}^0\left(\overline{I}_0, U\right) , \quad y(\cdot) \longmapsto \Phi_{y(\cdot)} : t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s)) \, \mathrm{d}s.$$

(*c*) *L'espace* $\mathrm{C}^0([t_0 - l, t_0 + l], B_F(y_0, r))$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet (résultat classique) et l'application $\Phi$ possède une itérée contractante.
Plus précisement, on s'assure que :
– $\Phi\left(\mathrm{C}^0\left(\overline{I}_0, B_F(y_0, r)\right)\right) \subset \mathrm{C}^0\left(\overline{I}_0, B_F(y_0, r)\right)$ (ce qui rend légitime la recherche de point fixe pour $\Phi$) ;
– une itérée de $\Phi$ est contractante : il existe $p > 0$ tel que $\Phi^p = \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{p \text{ fois}}$ est contractante.

D'après le théorème de Picard, $\Phi^p$ possède un unique point fixe $\psi$. Comme $\Phi^p(\psi) = \psi$, on a également $\Phi(\Phi^p(\psi)) = \Phi^p(\Phi(\psi)) = \Phi(\psi)$. Ainsi $\Phi(\psi)$ est point fixe de $\Phi^p$. Par unicité, on en déduit $\Phi(\psi) = \psi$ et $\psi$ est solution de $(PC)$ sur $I_0$.

# 3 Equations différentielles et systèmes linéaires

## 3.1 Les équations différentielles linéaires

Soit $I$ un intervalle réel, $n$ un entier et des applications $a_k : I \to \mathbb{K}$, $0 \leq k \leq n-1$ et $b : I \to \mathbb{K}$. L'équation différentielle

$$y^{(n)} = -\sum\nolimits_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)} + b\,(t) \tag{8}$$

est appelée *équation différentielle linéaire* d'ordre $n$ avec second membre.

**Remarque 3.1** *Ce vocabulaire est justifié par le fait que, lorsque la fonction $b$ est nulle, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (8) (définies sur le même intervalle réel) est un espace vectoriel dès qu'il n'est pas vide. Cette vérification est immédiate. (Voir également le théorème 3.5 ci-dessous.)*

Avec les notations de la section 1, l'application $f$ est définie sur $I \times \mathbb{K}^n$ par

$$f(y) = -\sum\nolimits_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)} + b\,(t)\,. \tag{9}$$

On notera, de manière plus habituelle, l'équation différentielle (8) sous la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b\,(t)\,. \tag{$EC$}$$

**Définition 3.1**
*(i) La fonction $b : I \to \mathbb{K}$ est appelée le* second membre *de l'équation différentielle (EC).*
*(ii) Quand la fonction $b$ est nulle, on dit par abus que l'équation différentielle est* sans second membre *ou bien* homogène.
*(iii) L'équation obtenue en faisant $b = 0$ dans l'équation différentielle (EC) s'appelle l'équation différentielle* sans second membre *ou bien* homogène *associée à l'équation différentielle (EC).*

D'après la proposition 1.4, une fonction $\varphi : J \to \mathbb{K}$ (avec $J \subset I$) $n$ fois dérivable est solution de l'équation différentielle (8) si, et seulement si l'application $\Phi : J \to \mathbb{K}^n$ définie par $\Phi = \left(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right)$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(y_0', y_1', \ldots, y_{n-1}'\right) = \left(y_1, \ldots, y_{n-1}, -\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y_k + b\,(t)\right),$$

qu'on écrit plus usuellement

$$Y' = A(t)Y + B\,(t) \tag{$SC$}$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad B\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Une équation différentielle telle que $(SC)$ s'appelle un système linéaire. On en propose l'étude dans la suite de cette section.

## 3.2 Généralités sur les systèmes linéaires

On rappelle que l'espace $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n^2$. L'espace $\mathbb{K}^n$ étant muni d'une de ses normes usuelles, notée $\|\cdot\|$ ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ ou $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$), on équipe souvent $M_n(\mathbb{K})$ de la norme

$$\|M\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|MX\|\,. \tag{11}$$

Cette norme coïncide avec celle de l'application linéaire de matrice $M$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On rappelle que $M_n(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. On considère dans la suite que $M_n(\mathbb{K})$ est muni de la topologie définie par une de ses normes. Ceci donne sens, en particulier, à la notion d'application continue définie sur un intervalle réel et à valeurs dans $M_n(\mathbb{K})$.

**Définition 3.2** *Soit $I$ un intervalle réel d'intérieur non vide, $A$ une application définie sur $I$ et à valeurs dans $M_n(\mathbb{K})$, $b$ une application définie sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.*
$(i)$ *On appelle* système différentiel linéaire à second membre *l'équation différentielle*

$$Y' = A(t)Y + b(t) \qquad (SC)$$

$(ii)$ *L'équation différentielle*

$$Y' = A(t)Y \qquad (SL)$$

*s'appelle* système différentiel linéaire homogène *(ou* sans second membre*).*

Le théorème de Cauchy-Lipschitz possède une version plus forte dans le cas des systèmes différentiels puisqu'on peut préciser que les solutions maximales ont même ensemble de définition que les applications $A$ et $b$. Voici l'énoncé.

**Théorème 3.3** *Avec les notations de la définition 3.2 , on suppose les applications $A$ et $b$ continues. Alors, pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$, le système différentiel (SC) possède une unique solution, définie sur $I$ vérifiant $Y(t_0) = Y_0$.*

Autrement dit, pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy

$$Y' = A(t)Y + b(t), \quad Y(t_0) = Y_0$$

admet une unique solution (maximale) définie sur $I$.

La **preuve** de ce théorème est hors du programme du CAPES.

Dans la suite, on supposera les hypothèses de la définition 3.2 et du théorème 3.3 satisfaites pour tout les systèmes différentiels considérés. Lorsqu'on parlera de solution d'un tel système différentiel, on supposera implicitement qu'il s'agit de la solution maximale définie sur $I$.

Le théorème fondamental, donnant la structure de l'ensemble des solutions des systèmes $(SL)$ et $(SC)$ est le suivant.

**Théorème 3.4**
$(i)$ *L'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions (définies sur $I$) du système différentiel (SL) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$.*
$(ii)$ *L'ensemble $E$ des solutions (définies sur $I$) du système différentiel (SC) est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension $n$ et d'espace vectoriel directeur $\mathcal{E}$.*

**Remarque 3.2** *On reformule souvent le $(ii)$ de la manière suivante*
$(ii')$ *la solution générale du système différentiel (SC) s'écrit comme la somme de solution générale du système différentiel (SL) et d'une solution particulière du système différentiel (SC).*

**Preuve**
$(i)$ Montrons d'abord que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble $F(I, \mathbb{K}^n)$. Notons que $\mathcal{E}$ n'est pas vide d'après le théorème 3.3. Soit $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{E}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Comme l'ensemble des applications dérivables à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel, l'application $F = \lambda\Phi + \mu\Psi$ est dérivable avec : $F' = \lambda\Phi' + \mu\Psi'$. Par ailleurs, pour tout $t \in I$,

$$A(t)F(t) + b(t) = \lambda A(t)\Phi + \mu A(t)\Psi + b(t) = \lambda\Phi'(t) + \mu\Psi'(t) = F'(t).$$

Ainsi, $F$ appartient à $\mathcal{E}$
Etudions la dimension de $\mathcal{E}$. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $t_0 \in I$. D'après le théorème 3.3, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une unique solution $\Phi_i$ du problème de Cauchy

$$Y' = A(t)Y + b(t) \quad Y(t_0) = e_i.$$

Montrons que $(\Phi_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathcal{E}$, qui sera donc un espace vectoriel de dimension $n$.

$(\Phi_i)_{1\leq i\leq n}$ *est une famille génératrice* $\mathcal{E}$.– En effet, soit $\Phi \in \mathcal{E}$. Comme $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\mathbb{K}^n$, il existe $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\Phi(t_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Considérons la fonction $\Psi \in F(I, \mathbb{K}^n)$ définie par $\Psi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi_i$. La fonction $\Psi$ est solution de $(SC)$ comme combinaison linéaire de solutions. On a

$$\Phi(t_0) = \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi_i(t_0) = \Psi(t_0).$$

Ainsi, les solutions $\Phi$ et $\Psi$ de l'équation différentiel $(SL)$ d'ordre 1 sont égales en $t_0$. Comme ce système possède la prorpiété d'unicité globale (théorème 3.3), elles sont égales sur $I$. D'où $\Phi = \Psi$ et $\Phi$ est combinaison linéaire des $(\Phi_i)_{1\leq i\leq n}$.
$(\Phi_i)_{1\leq i\leq n}$ *est une famille libre.*– En effet, soit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Phi_i$ une combinasion linéaire nulle des $(\Phi_i)_{1\leq i\leq n}$. En $t_0 \in I$, on a

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Phi_i\,(t_0) = 0 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$$

Or $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On a donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

$(ii)$ Soit $\Psi_0$ un solution fixée du système différentiel $(SC)$. Soit $\Psi \in F(I, \mathbb{K}^n)$. Il s'agit de montrer que $\Psi$ appartient à $E$, si et seulement si il existe $\Phi \in \mathcal{E}$ telle que $\Psi = \Phi + \Psi_0$.
Supposons que $\Psi$ appartient à $E$. Alors, $\Phi = \Psi - \Psi_0$ vérifie, pour tout $t \in I$,

$$\Phi'(t) = \Psi'(t) - \Psi_0'(t) = A(t)\,\Psi(t) + b(t) - A(t)\,\Psi_0(t) - b(t) = A(t)\,(\Psi(t) - \Psi_0(t)) = A(t)\,\Phi(t)\,.$$

Donc, l'application $\Phi$ appartient à $\mathcal{E}$ et $\Psi = \Psi_0 + \Phi$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $\Phi \in \mathcal{E}$ telle que $\Psi = \Phi + \Psi_0$. Alors, pour tout $t \in I$,

$$\Psi'(t) = \Phi'(t) + \Psi_0'(t) = A(t)\,\Phi(t) + A(t)\,\Psi_0(t) + b(t) = A(t)\,(\Phi(t) + \Psi_0(t)) + b(t) = A(t)\,\Psi(t) + b(t)\,.$$

Ainsi $\Psi$ appartient à $E$.□

Ce théorème possède la traduction immédiate pour les équations différentielles linéaires d'ordre $n$. Soit l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t)\,, \tag{EC}$$

où les $a_k : I \to \mathbb{K}$, $0 \leq k \leq n-1$ et $b : I \to \mathbb{K}$ sont des applications définies sur le même intervalle $I$.
Le calcul effectué dans la sous section 3.1 montre que l'équation différentielle $(EC)$, se transforme en un système différentiel linéaire de dimension $n$. La traduction des théorèmes 3.3 et 3.4, en utilisant la proposition 1.4, permet de montrer la proposition suivante.

**Théorème 3.5** *On suppose les applications $a_k : I \to \mathbb{K}$, $0 \leq k \leq n-1$ et $b : I \to \mathbb{K}$ continues sur $I$. Alors :*
*$(i)$ pour tout $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t)\,, \qquad y^{(i)}(t_0) = y_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-1 \tag{$PC_C$}$$

*admet une unique solution définie sur $I$ ;*
*$(ii)$ l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions (définies sur $I$) de l'équation différentielle homogène*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0, \tag{EL}$$

*associée à l'équation différentielle $(EC)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ ;*
*$(iii)$ l'ensemble $E$ des solutions (définies sur $I$) de l'équation différentielle $(EC)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension $n$ et d'espace vectoriel directeur $\mathcal{E}$.*

**Preuve**.– Associons à l'équation différentielle $(EC)$ (*resp.* $(EL)$) le système linéaire $Y' = A(t)\,Y + B(t)$ (*resp.* $Y' = A(t)\,Y$) où $A$ et $B$ sont définies par les relations (10) introduites dans la sous section 3.1. Notons $\mathcal{E}_S$ (*resp.* $E_S$) l'espace affine (*resp.* vectoriel) des solutions du système linéaire $Y' = A(t)\,Y + B(t)$ (*resp.* $Y' = A(t)\,Y$). D'après la proposition 1.4, une fonction $\Phi = (\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) : I \to \mathbb{K}^n$ est solution du système linéaire $Y' = A(t)\,Y + B(t)$ (*resp.* $Y' = A(t)\,Y$) si, et seulement si, $\varphi$ est solution de l'équation différentielle $(EL)$ (*resp.* $(EC)$) De plus, si l'une des propriétés est vérifiée, on a alors $\Phi = \left(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right)$. Définissons

$$\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}_S \to \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \quad (\textit{resp. } \Phi_E : E_S \to \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})), \qquad \Phi = \left(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right) \to \varphi.$$

L'application $\Phi_{\mathcal{E}}$ est linéaire, injective. (En effet, $\varphi = 0$ sur $I$ entraine $\varphi' = \ldots = \varphi^{(n-1)} = 0$ sur $I$.) De plus, son image est égale à $\mathcal{E}$. Ainsi,$\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathcal{E}_S$ donc un espace vectoriel de dimension $n$. De même, l'application $\Phi_E$ est une application affine injective, dont l'application linéaire associée est $\Phi_{\mathcal{E}}$. Ainsi, $E_S$ et $E$ sont isomorphes. Ceci donne les points $(ii)$ et $(iii)$ du théorème 3.5.
Par ailleurs, un raffinement immédiat de la proposition 1.4 montre qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ $n$ fois dérivable est solution du problème de Cauchy $(PC_C)$ si, et seulement si, l'application $\Phi : I \to \mathbb{K}^n$ définie par $\Phi = \left(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right)$ est solution du problème de Cauchy

$$Y' = A(t)\,Y + B(t)\,, \quad Y(t_0) = Y_0 = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{12}$$

Ceci donne le point $(i)$.

## 3.3 Les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

### 3.3.1 Remarques générales

Les théorèmes 3.3 et 3.4 ont une importance théorique considérable. Cependant ils sont de peu de secours pour la détermination concrète des solutions des systèmes linéaires. Dans le cas particulier où l'application $A$ définissant le système différentiel $(SC)$ est constante, on peut préciser davantage les solutions. C'est l'objet de cette sous section. Nous commencons par une remarque et une proposition générale.

**Remarque 3.3** *L'application constante $t \mapsto A$ est définie sur $\mathbb{R}$. Selon le théorème 3.3, les solutions maximales du système sans second membre $(SL)$ sont donc définies sur $\mathbb{R}$. Celles du système $(SC)$ le sont aussi si l'application $b$ est définie sur $\mathbb{R}$.*

**Proposition 3.6** *On suppose $b$ de classe $C^\infty$. Toute solution (définie sur $\mathbb{R}$) du système $(SC)$ est de classe $C^\infty$.*
*En particulier, toute solution (définie sur $\mathbb{R}$) du système $(SL)$ est de classe $C^\infty$.*

**Preuve**.– Soit $\Phi$ une solution du système $(SC)$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(t) = A\Phi(t) + b(t). \tag{13}$$

Le membre de droite de la relation (13) est une fonction continue, puisque par hypothèse $b$ est de classe $\mathrm{C}^\infty$ et $\Phi$ dérivable comme solution du système. Ainsi, $\Phi'$ est continue et $\Phi$ de classe $\mathrm{C}^1$.
Ce premier pas de raisonnement ce prête à une récurrence. Supposons $\Phi$ de classe $\mathrm{C}^n$. Alors, le membre de droite de la relation (13) est une fonction de classe $\mathrm{C}^n$. Ainsi, $\Phi'$ est de classe $\mathrm{C}^n$ et $\Phi$ de classe $\mathrm{C}^{n+1}$. Donc, $\Phi$ est de classe $\mathrm{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### 3.3.2 Résolution théorique

On rappelle que la relation (11), sous section 3.2, définit une norme sur l'espace $M_n(\mathbb{K})$. On a de plus

**Lemme 3.7** *Pour tout $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ on a*

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

De ce lemme, on déduit en particulier que $(M_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une algèbre normée. Ce lemme sert aussi à démontrer la proposition 3.8 ci-dessous.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut définir sur $\mathbb{R}$ l'application $L_n : t \mapsto \frac{t^n A^n}{n!}$. Cette application est clairement de classe $\mathrm{C}^\infty$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad L_n^{(k)}(t) = \frac{t^{n-k} A^n}{(n-k)!}.$$

**Proposition 3.8** *La série (d'applications) de terme général $\left(L_n : t \mapsto \frac{t^n A^n}{n!}\right)$ est normalement convergente dans $M_n(K)$ sur tout compact de $\mathbb{R}$. Sa somme, est une application de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $M_n(K)$. On la note*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n A^n}{n!}.$$

*On a de plus*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(t \mapsto \exp(tA)\right)(t) = A \exp(tA). \tag{14}$$

**Preuve**.– On va se restreindre à démontrer ici que la somme de la série $\sum L_n$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui suffit pour notre application aux systèmes linéaires. Le lecteur s'inspirera de la preuve donnée ci-dessous pour démontrer le cacactère $\mathrm{C}^\infty$ de l'application $t \mapsto \exp(tA)$.
*Convergence des séries $\sum L_n$ et $\sum L'_n$*.– Il suffit de démontrer le résultat sur tout intervalle $[-a, a]$ avec $a \in \mathbb{R}_+$. Par une récurrence immédiate à partir du lemme 3.7, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|t^n A^n\| \leq |t|^n \|A^n\| \leq |t|^n \|A\|^n.$$

D'où, pour tout $t \in [-a, a]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|L_n(t)\| \leq \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} \leq \frac{a^n \|A\|^n}{n!} \; ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|L'_n(t)\| \leq \frac{a^{n-1} \|A\|^n}{(n-1)!}$$

La série numérique de terme général $\frac{a^n \|A\|^n}{n!}$ étant convergente (vers $\exp(a\|A\|)$) les séries de fonctions $\sum L_n$ et $\sum L'_n$ convergent normalement sur l'intervalle $[-a, a]$.

*Résolution de l'équation différentielle.*– La série $\sum L_n$ étant normalement convergente sur les compacts (donc simplement ) et la série $\sum L'_n$ normalement convergente sur les compacts, la somme de la série est une application définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathrm{C}^1$. De plus, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t \mapsto \exp(tA)\right)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}A^n}{(n-1)!},$$

car $L'_0 = 0$. Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$A\sum_{n=1}^{N} \frac{t^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!} = A\sum_{n=0}^{N-1} \frac{t^n A^n}{(n)!}$$

D'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}A^n}{(n-1)!} = A\exp(tA)$, par passage à la limite dans l'égalité précédente.

**Théorème 3.9** *Pour tout* $(t_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$*, le problème de Cauchy*

$$Y' = AY, \quad Y(t_0) = Y_0$$

*admet une unique solution (maximale) l'application* $\Phi$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t) = \exp\left((t - t_0)A\right) Y_0.$$

**Preuve**.– La proposition 3.8 entraine que l'application $t \mapsto \exp(tA)Y_0$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ est de classe $\mathrm{C}^1$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\right)(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t \mapsto \exp(tA)Y_0\right)\right)(t) = A\exp(tA)Y_0 = A\Phi(t).$$

De plus $\Phi(0) = Y_0$.

### 3.3.3 Recherche plus pratique des solutions

Pour les systèmes "en petite dimension", on peut calculer à la main l'exponentielle d'une matrice (définie dans la proposition 3.8). Une calculatrice disposant d'un noyau de calcul formel permet d'accéder à des dimensions un peu plus grandes.

On rappelle briévement que dans les méthodes de calcul à la main on distingue les trois cas ci-dessous :

**la matrice $A$ est nilpotente,**

**La matrice $A$ est diagonalisable,**

**Autre cas: la matrice $A$ est triangularisable.** On renvoie le lecteur à tout manuel de L2/L3 pour plus de détails à ce sujet.

# 4 Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2

On précise et complète les résultats obtenus pour les systèmes linéaires, lorsqu'on les transpose aux cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

## 4.1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Les équations différentielles d'ordre 1 sont le cas le plus simple de système linéaire. Le point $(i)$ de la proposition suivante, qui synthétise et complète les résultats déja connus, peut donc être vu comme cas particulier du théorème 3.9. On considère les équations différentielles linéaires

$$y' = a(t)\,y, \tag{$1_L$}$$
$$y' = a(t)\,y + b(t), \tag{$1_C$}$$

où $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont deux applications définies et continues sur l'intervalle $I$.

**Proposition 4.1**
*(i) L'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions (définies sur $I$) de l'équation différentielle ($1_L$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.*
*(ii) Cet espace est engendré par la fonction $t \mapsto \exp(A(t))$, où $A$ est une primitive de la fonction $a$.*

**Preuve**.– L'assertion $(i)$ est une traduction du thérorème 3.5, partie $(ii)$ pour l'ordre 1. On peut donner une preuve complète de cette proposition, indépendante de théorèmes généraux. Tout d'abord, l'existence de la primitive $A$ vient de la continuité de $a$.
Soit $\varphi$ une solution de l'équation différentielle ($1_L$) définie sur $I$. Posons, pour tout $t \in I$, $h(t) = \exp(-A(t))\,\varphi(t)$. L'application $h$ est dérivable avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) = -a(t)\exp(-A(t))\,\varphi(t) + \exp(-A(t))\,\varphi'(t) = 0.$$

puisque $\varphi'(t) = a(t)\varphi(t)$. Ainsi, $h'$ est nulle sur $\mathbb{R}$, donc constante. Posons $h = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \lambda \exp(A(t))$. Réciproquement l'application $\varphi(t) = \lambda \exp(A(t))$ est bien solution de l'équation différentielle ($1_L$).

**Proposition 4.2**
*(i) L'ensemble $E$ des solutions (définies sur $I$) de l'équation différentielle ($1_C$) est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension 1 et d'espace vectoriel directeur $\mathcal{E}$.*
*(ii) Plus précisement, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, la solution du problème de Cauchy*

$$y' = a(t)\,y + b(t), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{PC}$$

*est la fonction $\psi$ définie par*

$$\forall t \in I, \quad \psi(t) = \exp(A(t))\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(-A(s))\,b(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

**Preuve**.– L'assertion $(i)$ est la traduction pour l'ordre 1 du théorème 3.5, partie $(iii)$. L'assertion $(ii)$ est un corollaire du lemme suivant.

**Lemme 4.3** *(méthode dite* de la variation de la constante*) On peut déterminer une solution de l'équation différentielle ($1_C$) en la cherchant sous la forme $\varphi(t) = \lambda(t)\exp(A(t))$ où $\lambda(\cdot)$ est une fonction dérivable à déterminer, définie sur l'intervalle $I$, intervalle de définitions des fonctions $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$.*

**Preuve**.– Avec les notations du lemme, on a

$$\forall t \in I, \qquad \varphi'(t) = \lambda'(t)\exp(A(t)) + \lambda(t)\,a(t)\exp(A(t)).$$

Supposons $\varphi$ solution de l'équation différentielle ($1_C$). En remplacant dans l'équation, il vient

$$\forall t \in I, \qquad \lambda'(t)\exp(A(t)) + \lambda(t)\,a(t)\exp(A(t)) = \lambda(t)\,a(t)\exp(A(t)) + b(t),$$

soit

$$\forall t \in I, \qquad \lambda'(t) = \exp(-A(t))\,b(t).$$

La fonction du membre de droite de l'égalité précédente est continue donc possède une primitive. On peut choisir, par exemple,

$$\lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \exp(-A(s))\,b(s)\,\mathrm{d}s,$$

la primitive qui s'annule en $t_0$. On obtient $\varphi(t) = \exp(A(t)) \int_{t_0}^{t} \exp(-A(s))\,b(s)\,\mathrm{d}s$.
D'après l'assertion $(i)$, la solution du problème de Cauchy $(PC)$ s'écrit $\psi(t) = \lambda \exp(A(t)) + \varphi(t)$ où $\lambda$ est une constante à déterminer. Comme $\varphi(0) = 0$, on obtient $\lambda = y_0$.

**Exemple 4.1** *Résoudre le problème de Cauchy*

$$y' - y = \sin t\,, \qquad y(0) = 0. \tag{15}$$

On résoud d'abord l'équation différentielle $y' = y$. Toute solution de cette équation différentielle s'écrit $\varphi(t) = \lambda \exp(t)$ où $\lambda$ est une consntante réelle. On détermine ensuite une solution de l'équation différentielle $y' = y + \sin t$. Utilisons la méthode de la variation de la constante. On cherche cette solution sous la forme $\psi(t) = \lambda(t) e^t$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi'(t) = \lambda'(t) \exp(t) + \lambda(t) \exp(t) = \lambda(t) \exp(t) + \sin t.$$

D'où $\lambda'(t) = \exp(-t) \sin t$. Une primitive de $\lambda'$ est égale à $t \mapsto e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\right)$. On choisit par exemple

$$\lambda(t) = \int_0^t \exp(-s) \sin s \mathrm{d}s = \left[e^{-s}\left(-\frac{1}{2}\cos s - \frac{1}{2}\sin s\right)\right]_0^t = e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\right) + \frac{1}{2}.$$

D'où $\psi(t) = \lambda(t) e^t = -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^t$. Toute solution de l'équation différentielle $y' - y = \sin t$ s'écrit alors $\varphi(t) = \lambda e^t + \psi(t)$ où $\lambda$ est une constante réelle. Comme $\psi(0) = 0$, la solution du problème de Cauchy (15) s'obtient pour $\lambda = 0$. C'est donc la fonction $\psi$.

**Remarque 4.1** *Il peut sembler maladroit de recourir à la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution de l'équation différentielle $y' - y = \sin t$. En effet, comme le second membre est de la forme $t \mapsto \sin t$, on peut montrer qu'il existe une solution particulière de la forme de la forme $\psi_1 : t \mapsto \alpha \cos t + \beta \sin t$, où l'on détermine les constantes réelles $\alpha$ et $\beta$ en remplaçant dans l'équation. On trouve immédiatement $\psi_1(t) = -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$. On remarque que cette solution n'est pas égale à la solution $\psi$ choisie ci-dessus.*

**Remarque 4.2** Le principe de superposition.– *On suppose que l'application $b(\cdot)$, notation de la relation ($1_C$), s'écrit $b(\cdot) = \sum_{i=1}^n b_i(\cdot)$ où les $b_i : I \to \mathbb{K}$ sont $n$ applications définies et continues sur l'intervalle $I$. Soit $\psi_i$ une solution de l'équation différentielle*

$$y' = a(t)y + b_i(t).$$

*Alors $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i$ est une solution de l'équation différentielle ($1_C$).*
*Ainsi, pour déterminer une solution de l'équation avec second membre, il est parfois possible de décomposer ce second membre en une somme de fonctions pour lesquelles il est plus simple de déterminer une solution des équations correspondantes.*

**Exemple 4.2** *Soit à résoudre l'équation différentielle*

$$y' - y = \sin t + t^2. \tag{16}$$

On dispose déjà d'une solution de l'équation différentielle $y' - y = \sin t$ (voir exemple 4.1 et remarque 4.1). Selon le principe de superposition, il reste à résoudre une solution de l'équation différentielle

$$y' - y = t^2. \tag{17}$$

On peut la chercher sous la forme d'une fonction polynôme $\psi_2$ d'ordre 2. Posons $\psi_2(t) = t^2 + \alpha t + \beta$. On a $\psi_2(t) = 2t + \alpha$. En remplaçant dans l'équation différentielle (17), il vient

$$t^2 + (2 - \alpha) t + \alpha - \beta = t^2.$$

D'où $\psi_2(t) = t^2 + 2t - 2$. Ainsi, toute solution de l'équation différentielle (16) s'écrit

$$\varphi(t) = \lambda e^t + \psi_1(t) + \psi_2(t) = \lambda e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + t^2 + 2t - 2,$$

où $\lambda$ est une constante réelle.

## 4.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

### 4.2.1 L'équation sans second membre ou homogène

On considère l'équation différentielle linéaire

$$y'' + a(t) y' + b(t) y = 0, \tag{$2_L$}$$

où $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont deux applications continues définies sur un intervalle $I$.

La traduction pour l'ordre 2 du théorème 3.5, partie (*ii*), donne la proposition suivante.

**Proposition 4.4**
*(i) Pour tout $(t_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy*

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0, \qquad y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = z_0 \tag{PC}$$

*admet une unique solution définie sur $I$.*
*(ii) L'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions (définies sur $I$) de l'équation différentielle $(2_L)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.*

Selon une convention déjà prise, lorsqu'on parle de solution de l'équation différentielle $(2_L)$ dans la suite, il s'agira implicitement de solutions définies sur $I$.

**Définition 4.5** *On appelle* système fondamental de solutions *de l'équation différentielle $(2_L)$ toute base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.*

**Définition 4.6** *Soit $(\varphi_1, \varphi_2)$ un couple de solutions de l'équation différentielle $(2_L)$. On appelle* wronskien *de $(\varphi_1, \varphi_2)$ la fonction, notée $W_{\varphi_1,\varphi_2}$, définie sur $I$ par*

$$\forall t \in I, \quad W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur le couple de solutions considéré, on écrira plus simplement $W(\cdot)$ au lieu de $W_{(\varphi_1,\varphi_2)}(\cdot)$.

**Proposition 4.7** *Soit $(\varphi_1, \varphi_2)$ un couple de solutions de l'équation différentielle $(2_L)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(i) le couple $(\varphi_1, \varphi_2)$ est un* système fondamental de solutions *de l'équation différentielle $(2_L)$ ;*
*(ii) pour tout $t \in I$, $W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) \neq 0$ ;*
*(iii) il existe $t \in I$ tel que $W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) \neq 0$.*

Deux **preuves** peuvent être proposées. Elles ont, comme point commum, d'être immédiatement généralisables aux équations différentielles d'ordre $n$, moyennant l'introduction du wronskien correspondant.
$(a)$ La première revient à montrer que $(\varphi_1, \varphi_2)$ est un *système fondamental de solutions* de l'équation différentielle $(2_L)$ si, et seulement si, le couple $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{pmatrix}$ est une base de l'espace des solutions du système linéaire associé $Y' = A(t)Y$ avec $A(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(\cdot) & -a(\cdot) \end{pmatrix}$. On s'inspirera de la preuve du théorème 3.4, qui utilise essentiellement le théorème d'existence et d'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires.
$(b)$ La seconde, que nous allons détailler, reste dans le cadre des équations différentielles mais les arguments sont similaires, à ceux de la preuve précédente puisque appuyés sur le théorème de structure de l'ensemble des solutions.
[$(i) \Rightarrow (ii)$] On démontre [non $(ii) \Rightarrow$ non $(i)$]. On suppose donc qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $W_{\varphi_1,\varphi_2}(t_0) = 0$. Il existe alors un couple $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que

$$\begin{cases} \lambda\varphi_1(t_0) + \mu\varphi_2(t_0) & = & 0 \\ \lambda\varphi_1'(t_0) + \mu\varphi_2'(t_0) & = & 0 \end{cases}.$$

Soit $\varphi = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$. Comme l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation différentielle $(2_L)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\varphi$ est une solution de l'équation différentielle $(2_L)$, qui vérifie de plus

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = 0.$$

Or, la solution nulle est une solution (triviale) de l'équation différentielle $(2_L)$ vérifiant ces conditions. Par unicité de la solution du problème de Cauchy

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0, \qquad y(t_0) = 0 \quad y'(t_0) = 0,$$

$\varphi$ est nulle et donc $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ Ainsi, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont liées et le couple $(\varphi_1, \varphi_2)$ ne forme donc pas un système fondamental de solutions.
[$(ii) \Rightarrow (iii)$] Clair, puisque $I$ est supposé non vide.

$[(iii) \Rightarrow (i)]$ On démontre [non $(i) \Rightarrow$ non $(iii)$]. Si le couple $(\varphi_1, \varphi_2)$ ne forme pas un système fondamental de solutions, alors il existe un couple $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tel que $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0$. Donc $\lambda\varphi_1' + \mu\varphi_2' = 0$, ce qui veut dire que

$$\forall t \in I, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda\varphi_1(t) + \mu\varphi_2(t) & = & 0 \\ \lambda\varphi_1'(t) + \mu\varphi_2'(t) & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, le système d'équation linéaires précédent admet une solution non nulle. C'est donc que, pour tout $t \in I$, le déterminant de ce système, égal au wronskien, est nul.□

### 4.2.2 L'équation avec second membre

On considère l'équation différentielle linéaire

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t), \tag{$2_C$}$$

où $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ sont trois applications continues définies sur un intervalle $I$.

La traduction pour l'ordre 2 du théorème 3.5, partie $(iii)$, donne la proposition suivante.

**Proposition 4.8**
*$(i)$ Pour tout $(t_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy*

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t), \qquad y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = z_0$$

*admet une unique solution définie sur $I$.*
*$(ii)$ L'ensemble $E$ des solutions (définies sur $I$) de l'équation différentielle $(2_C)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension 2 d'espace vectoriel directeur $\mathcal{E}$, espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée à l'équation différentielle $(2_C)$.*

En admettant qu'on ait déterminé l'espace $\mathcal{E}$, le $(ii)$ indique qu'il suffit de connaître une solution de l'équation différentielle $(2_C)$ pour connaître $E$. Le lemme suivant décrit une méthode systématique, mais lourde. Il convient de ne l'utiliser qu'après avoir épuisé toutes les autres méthodes.

**Lemme 4.9** *(méthode dite* de la variation des deux constantes*) Soit $(\varphi_1, \varphi_2)$ est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $(2_L)$. On peut déterminer une solution de l'équation différentielle $(2_C)$ en la cherchant sous la forme $\varphi(\cdot) = \lambda_1(\cdot)\,\varphi_1(\cdot) + \lambda_2(\cdot)\,\varphi_2(\cdot)$ où $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ sont deux fonctions dérivables à déterminer, définies sur l'intervalle $I$, intervalle de définition des fonctions $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ et $c(\cdot)$.*

**Preuves**.– On procède par condition nécessaire. Supposons donc qu'il existe une solution de l'équation différentielle $(2_C)$ écrite comme dans le lemme. On a alors

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \lambda_1'(t)\,\varphi_1(t) + \lambda_2'(t)\,\varphi_2(t) + \lambda_1(t)\,\varphi_1'(t) + \lambda_2(t)\,\varphi_2'(t)$$

On va de plus supposer que $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ vérifient

$$\forall t \in I, \quad \lambda_1'(t)\,\varphi_1(t) + \lambda_2'(t)\,\varphi_2(t) = 0, \tag{18}$$

afin de ne pas avoir à dériver $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ deux fois. On obtient alors

$$\forall t \in I, \quad \varphi''(t) = \lambda_1'(t)\,\varphi_1'(t) + \lambda_2'(t)\,\varphi_2'(t) + \lambda_1(t)\,\varphi_1''(t) + \lambda_2(t)\,\varphi_2''(t)\,.$$

En remplacant dans l'équation différentielle $(2_C)$, il vient

$$\lambda_1'(t)\,\varphi_1'(t) + \lambda_2'(t)\,\varphi_2'(t) = c(t)$$

puisque $\lambda_i(t)\,(\varphi_i''(t) + a(t)\,\varphi_i'(t) + b(t)\,\varphi_i(t)) = 0$, pour $i = 1,\ 2$. Ainsi, on cherche $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ vérifiant

$$\forall t \in I, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1'(t)\,\varphi_1(t) + \lambda_2'(t)\,\varphi_2(t) & = & 0 \\ \lambda_1'(t)\,\varphi_1'(t) + \lambda_2'(t)\,\varphi_2'(t) & = & c(t) \end{array} \right. . \tag{19}$$

Comme $(\varphi_1, \varphi_2)$ est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $(2_L)$, le wronskien de ce système est non nul en tout $t \in I$. Le système précédent admet comme solution unique

$$\forall t \in I, \quad \lambda_1'(t) = \frac{1}{W_{\varphi_1,\varphi_2}(t)} \begin{vmatrix} 0 & \varphi_2(t) \\ c(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}, \quad \lambda_2'(t) = \frac{1}{W_{\varphi_1,\varphi_2}(t)} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ \varphi_1'(t) & c(t) \end{vmatrix}$$

Comme les fonctions $\varphi_i(\cdot)$, $\varphi_i'(\cdot)$ (pour $i = 1, 2$), la fonction $c(\cdot)$ sont continues sur $I$ et que $W_{\varphi_1,\varphi_2}(\cdot)$ ne s'annule pas sur $I$, les expressions définissant $\lambda_1'(\cdot)$ et $\lambda_2'(\cdot)$ sont des fonctions continues sur $I$. Ainsi $\lambda_1'(\cdot)$ et $\lambda_2'(\cdot)$ admettent des primitives. On choisir un couple particulier de primitives. On dispose ainsi de $\varphi$ dont on vérifie alors sans peine qu'elle est bien solution de l'équation différentielle $(2_C)$, notamment car $\lambda_1'(\cdot)$ et $\lambda_2'(\cdot)$ sont solutions du système linéaire (19).

**Remarques 4.3**
(*a*) *Par exemple, déterminons la solution du problème de Cauchy (PC) à partir d'un système fondamental* $(\varphi_1, \varphi_2)$ *de solutions de l'équation différentielle* $(2_L)$*. On choisit*

$$\lambda_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{1}{W_{\varphi_1,\varphi_2}(s)} (\varphi_2(s)\, c(s))\, \mathrm{d}s \qquad \lambda_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{W_{\varphi_1,\varphi_2}(s)} (\varphi_1(s)\, c(s))\, \mathrm{d}s\ ,$$

*primitives de* $\lambda_1'(\cdot)$ *et* $\lambda_2'(\cdot)$ *respectivement, s'annulant en* $t = t_0$*. Alors, la solution du problème de Cauchy (PC) s'écrit*

$$\varphi(t) = -\varphi_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{W_{\varphi_1,\varphi_2}(s)} (\varphi_2(s)\, c(s))\, \mathrm{d}s + \varphi_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{W_{\varphi_1,\varphi_2}(s)} (\varphi_1(s)\, c(s))\, \mathrm{d}s.$$

(*b*) *Il ne s'agit pas de se souvenir par coeur des calcul effectués dans la preuve du lemme 4.9 ou dans le* (*a*) *de cette remarque, mais essentiellement de la méthode. En particulier la condition (18) se retient par le fait qu'il convient de ne pas faire apparaître de dérivée seconde de* $\lambda_1(\cdot)$ *et* $\lambda_2(\cdot)$ *dans la méthode.*

(*c*) *Le principe de superposition, exposé dans la remarque 4.2 pour les équations différentielles d'ordre 1, reste valide pour les équations d'ordre 2.*

**IUFM de GUADELOUPE -Morne Ferret - BP 517**
**97178 ABYMES CEDEX (Guadeloupe)**